

**EXERCICE N° I (4.5points)**

A- On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct

$(o, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $f_a$  l'application qui associe au point M d'affixe le point M' d'affixe

$$z' \text{ tel que : } z' = \left(\frac{1}{2} + ai\right)Z + \frac{3}{2} - 3ai \quad a \in \mathbb{R}$$

1°) Reconnaître l'application  $f_a$  et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes de a.

a)  $a = -\frac{1}{2}i$     b)  $a = i$     c)  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$     d)  $a = \frac{1}{2}$

2°) Dans la suite de l'exercice on suppose que  $a \in \mathbb{R}$  et on note  $\theta = \arg\left(\frac{1}{2} + ai\right)$

on note  $M_o = O(0,0)$  et  $\Omega(3,0)$  pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $M_{n+1} = f(M_n)$ .

Soit  $z_n$  l'affixe de  $M_n$ .

a) Montrer que  $f_a$  est une similitude directe de rapport  $k = \frac{1}{2 \cos \theta}$

b) Calculer et écrire sous forme algébrique, les nombres  $z_1$  et  $z_2$  en fonction de a.

c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $Z_n = 3 - 3\left(\frac{1}{2 \cos \theta}\right)^n e^{in\theta}$

B- ABCD et DEFG sont des carrés directs tels que E est le milieu de  $[CD]$

1°) Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en B.

a) Déterminer les caractéristiques de S

b) Déterminer l'image par S du point E et la mesure principale de  $(\vec{AE}, \vec{BF})$

2°) On note (C) le cercle de diamètre  $[BD]$  et k le point d'intersection des droites (AE) et (BF)

a) Etablir que  $K \in (C)$

b) En déduire que (KD) et (BF) sont perpendiculaires.

3°) On note (C') le cercle de diamètre [DF]

a) Etablir que  $K \in (C')$

b) En déduire que les points C ; G et K sont alignés.

### **EXERCICE N° II : (4points)**

La fonction de f e  $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$  st définie sur  $[0, +\infty[$  par :

(C) désigne sa courbe représentative dans le plan muni d'un R.O.N  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  unité graphique : 3 cm.

1°) a) Etudier le signe de  $f'(x)$  sur  $[0, +\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de f sur  $[0, +\infty[$

2°) Démontrer que (C) admet en  $+\infty$  une asymptote (D) à préciser.

3°) Etablir que l'équation «  $f(x) = 0$  » admet une unique solution  $x_0$  sur  $[0, +\infty[$  et que  $1 < x_0 < 2$

4°) Tracer (C) et (D)

5°) Soit g la fonction définie sur  $I = [1, +\infty[$  par  $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$

a) Montrer que  $x_0$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = x$

b) Donner le tableau de variation de g sur I.

En déduire que : pour tout  $x \in I$  ;  $g(x) \in I$ .

c) Montrer que pour tout  $x \in I$  ;  $x \in I \mid |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$

Enocluire que pour tout  $x \in I$  ;  $|g(x) - x_0| \leq \frac{3}{e^2} |x - x_0|$

6°) La suite  $(a_n)_n$  est définie par :

$a_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $a_{n+1} = g(a_n)$

a) Montrer que : pour  $n \in \mathbb{N}$  ;  $a_n \in I$

b) Montrer que pout tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $|a_n - x_0| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

c) Déterminer la limite de  $(a_n)$  en  $+\infty$

d) Détermine le plus petit entier  $n_0$  tel que :

$$|a_{n_0} - x_0| \leq \frac{1}{1000}$$

### EXERCICE N° III (3.5 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . On donne le point  $A(12 ; 18)$ .

On désigne par B le point de l'axe  $(O, \vec{e}_1)$  et par C le point de l'axe  $(O, \vec{e}_2)$  tel que  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ .

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1°) Démontrer que le couple  $(x, y)$  est solution de l'équation (E) :  $2x + 3y = 78$ .

2°) On veut trouver tous les couples  $(B, C)$  ayant pour coordonnées des entiers relatifs.

- Montrer que l'on est ramené à l'équation (E) avec  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- A partir de la définition de B et C, trouver une solution  $(x_0, y_0)$  de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- Démontrer qu'un couple  $(x, y)$  est solution de (E) si et seulement si il est de la forme  $(12+3k ; 18-2k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$
- Combien y a-t-il de couple de points  $(B, C)$  ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs tels que :

$$-6 \leq x \leq 21 \text{ et } -5 \leq y \leq 14.$$

**EXERCICE N° IV ( 4points)** Dans l'espace muni d'un repère R.O.N  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on donne

la sphère(S) :  $x^2 + y^2 + z^2 = 62$  et le plan  $(\pi)$  passant par  $A(0, 1, 1)$  et de vecteur normal

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

1°) a) Déterminer une équation cartésienne de  $(\pi)$

- L'intersection de  $(\pi)$  et (S) un cercle déterminer le centre H et le rayon r de ce cercle
- Soient P et Q deux points de (S) tels que :  $P(7, 3, \alpha)$  avec  $\alpha > 0$  et  $Q(6, \beta, 1)$  avec  $\beta > 0$

Déterminer une équation pour chacun des plans tangents à(S) en P et en Q

c) Déterminer une équation du plan passant par A et dont l'intersection avec (S) est un cercle de rayon le plus petit possible

2°) Soit h l'homothétie de l'espace de centre O et de rapport k,  $k \in \mathbb{R}$

a) Donner une équation de (S') = h(S)

b) Pour quelles valeurs de k le point A reste à l'intérieur de (S')

### **EXERCICE V (4points)**

plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et l'unité graphique est 2cm les

fonctions f et F sont définies sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

et  $F(x) = x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ . (C) désigne la courbe représentative de f dans le repère précédent.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2) (a) – Montrer que f réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle K que l'on déterminera.

(b)- Tracer dans le repère précédent la courbe (C) et la courbe (C') de  $f^{-1}$ .

3) (a)-Démontrer que F est une primitive de f sur  $]0, +\infty[$

(b)- Endéduire, en  $cm^2$ , l'aire du domaine plan (D) définie par :  $(D) = \{M(x, y) \in P ; 1 \leq x \leq 2 \text{ et } f(x) \leq y \leq 0\}$

4) Pour tout réel x de  $]-\infty, 0[$  on pose  $a(x) = \int_x^{\frac{1}{e}} f^{-1}(t) dt$

(NB : on ne calculera pas  $f^{-1}(t)$ )

Calculer  $a\left(\frac{1}{e}\right)$ . Etudier le signe de a(x) sur  $]-\infty, 0[$

**BONNE CHANCE**