Lycée secondaire Ali Bourguiba Kalâa kbira		Année secondaire : 2010 - 2011
Mathématiques	Devoir de synthèse n°3	Classes : 4 M 1,2
Prof : MAATALLAH	Date : 13 - 05 -2011	Durée : 4 heures

Exercice n°1 :(2 points)

Pour chaque question une seule réponse est correcte . Relever cette réponse .

1) Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x)=\int_1^{ln(2x)} \frac{e^{4t}}{1+e^{-3t}}\,dt$. Alors on a :

a) $F'(x) = \frac{64\,x^4}{1+8\,x^3}$ b) $F'(x) = \frac{128\,x^6}{1+8\,x^3}$ c) $F'(x) = \frac{32\,x^6}{1+16\,x^3}$

2) Le quotient de la division euclidienne de 1938 par -163 est :

a) -11 b) -10 c) -12

3) Les deux derniers chiffres de $N = 2011^{2012}$ sont :

a) 47 b) 31 c) 21

4) On pose $a = 5n + 3$ et $b = 7n - 2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Si a et b ne sont pas premiers entre eux alors :

a) $PGCD(a, b) = 27$ b) $PGCD(a, b) = 31$ c) $PGCD(a, b) = 41$.

Exercice n° 2 :(3 points)

Le responsable d'un site internet s'intéresse au nombre de pages visitées sur son site . Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées en milliers durant chacune des quatre semaines suivant l'ouverture du site .

Semaine xi	1	2	3	4
Nombre de pages visitées en milliers yi	40	45	55	70

1) a) Représenter Le nuage de points associé à cette série statistique et placer le point moyen G .

b) On appelle (d) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés . Parmi les deux propositions : $y = 9x + 29$ et $y = 10x + 27{,}5$ laquelle est une équation de la droite (d) ? Tracer (d) .

c) En supposant que cet ajustement reste valable pendant les deux mois qui suivent l'ouverture du site , donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site .

2) Le responsable décide de mettre en place, au cours de la quatrième semaine suivant l'ouverture du site , une vaste campagne publicitaire afin d'augmenter le nombre de visiteurs du site . Il étudie l'évolution du nombre de pages du site visitées au cours des trois semaines suivant cette opération publicitaire .

Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées au cours des sept semaines suivant l'ouverture du site .

Semaine xi	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de pages visitées yi	40	45	55	70	95	125	175

Compte tenu de l'allure du nuage , un ajustement exponentiel semble approprié . Pour cela on pose $z = ln\,(y)$.

Semaine xi	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$	3,69	3,81	4,01	4,25	4,55	4,83	5,16

a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés .

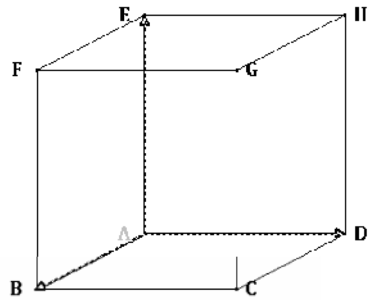
b) En déduire y en fonction de x . Estimer le nombre de pages visitées au cours de la $8^{ième}$ semaine après l'ouverture du site .

c) Combien de semaines auraient été nécessaires pour atteindre ce résultat sans campagne publicitaire ?

Exercice n° 3 : (4 points)

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 . On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[CD]$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{BI} \wedge \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EJ}$ .En déduire que le plan $P = (BIG)$ a pour équation : $x + 2y - 2z - 1 = 0$.



b) Calculer le volume du tétraèdre $EIBG$.

c) La droite (EJ) coupe P en un point L . Déterminer les coordonnées de L .

d) Montrer que les plans P et (EFG) sont sécants suivant une droite dont on déterminera une représentation paramétrique .

2) Soit h l'homothétie de centre E et de rapport 2 . Calculer le volume du tétraèdre image de $EIBG$ par h .

3) Soit S la sphère de centre E et passant par B et S' l'image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) Montrer que S et P se coupent suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon .

b) Montrer que S et S' se coupent suivant un cercle $(\mathcal{C}')$dont on précisera le centre et le rayon .

c) Donner les équations cartésiennes des plans P_1 et P_2 parallèles à P et tangents à S .

Exercice n° 4 :(4 points)

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = 3$ et $a_{n+1} = 2a_n - 1$, $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = 2b_n + 3$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n , $a_n = 2^{n+1} + 1$.

2) a) Calculer le $PGCD$ de a_3 et a_4 puis celui de a_{2010} et a_{2011} .

b) a_n et a_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $2a_n - b_n = 5$ puis exprimer b_n en fonction de n .

b) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5 .

c) On note d_n le $PGCD$ de a_n et b_n . Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.

En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $PGCD(a_n, b_n) = 1$.

Exercice n° 5 : (7 points)

Soit , $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n et F_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$ et $F_n(x) = \int_0^{1-2x} f_n(t)\, dt$.

I) On suppose que n est impair . Soit (C_n) la courbe de F_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que $\forall\, x < 0$, $F_n(x) \leq F_n(0) - 2^{n+1}\sqrt{e}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} F_n(x)$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{F_n(x)}{x}\right]$.

b) Etudier les variations de F_n (On ne cherchera pas à calculer $F_n(0)$) . Montrer que $F_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions dont une est $\alpha_n \leq 0$.

c) Expliciter $F_1(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\alpha_1 \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[$ puis construire (C_1) .

2) a) Montre que $F_{n+1}(0) = 2(\mathrm{n}+1)\, F_n(0) - 2$. Déduire $F_2(0)$ puis $F_3(0)$.

b) Etudier les variations de $H(x) = F_3(x) - F_1(x)$ sur $\mathbb{R}$. Déduire le signe de $H(x)$ sur $[0, +\infty[$.

c) Soit M et N deux points respectivement de (C_1) et (C_3) de même abscisse $x \geq 0$. Calculer la valeur maximale de la distance MN .

II) On a représenté (dans la page 3) les courbes de f_2 et de $F : x \mapsto \frac{1}{13} F_2\left(\frac{1-x}{2}\right) + 2$

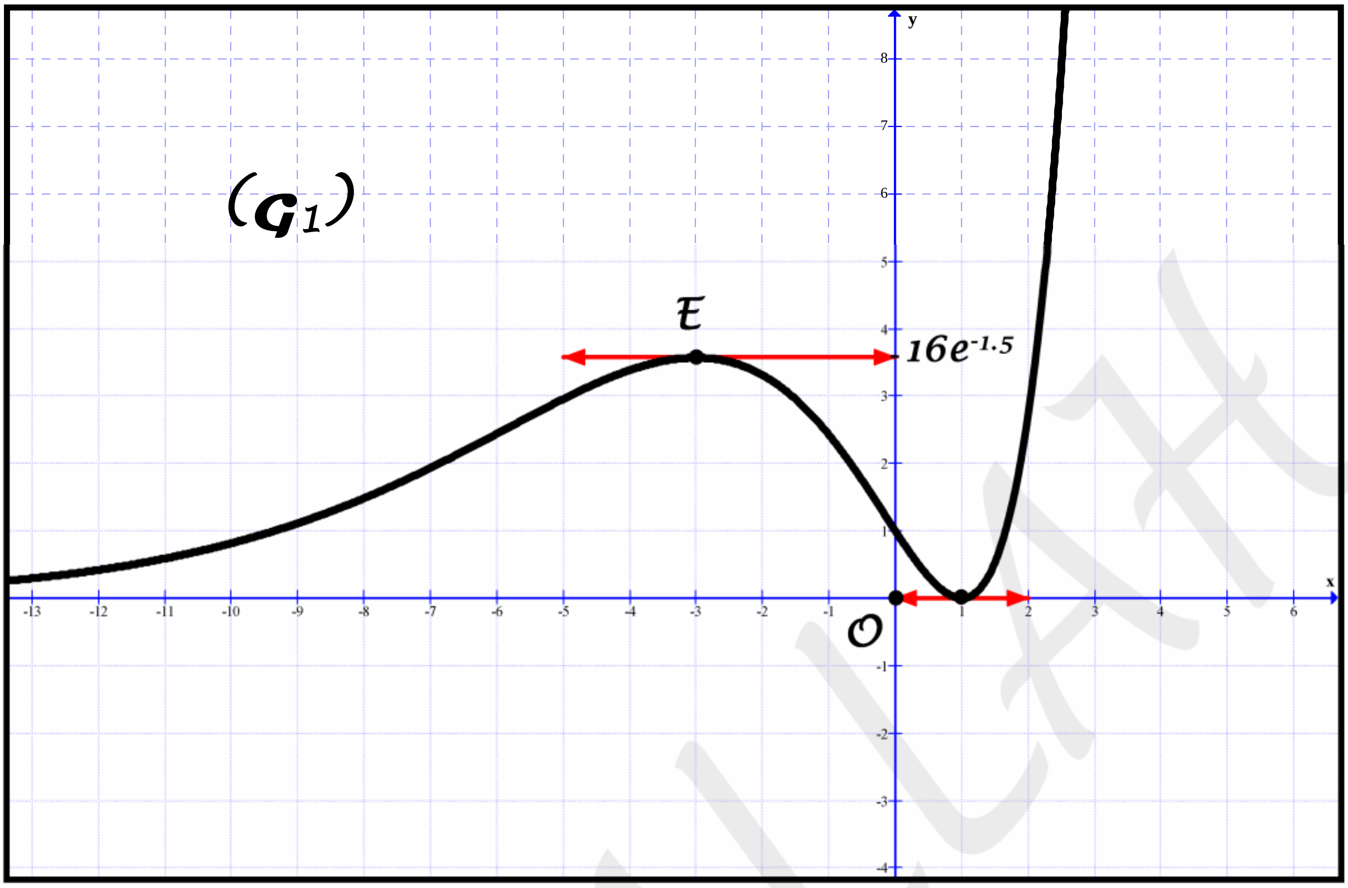
1) Reconnaitre la courbe de f_2 . Soit $\lambda < 0$ et $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire du domaine limité par la courbe de f_2 , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 1$. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}_\lambda$. Interpréter graphiquement cette limite .

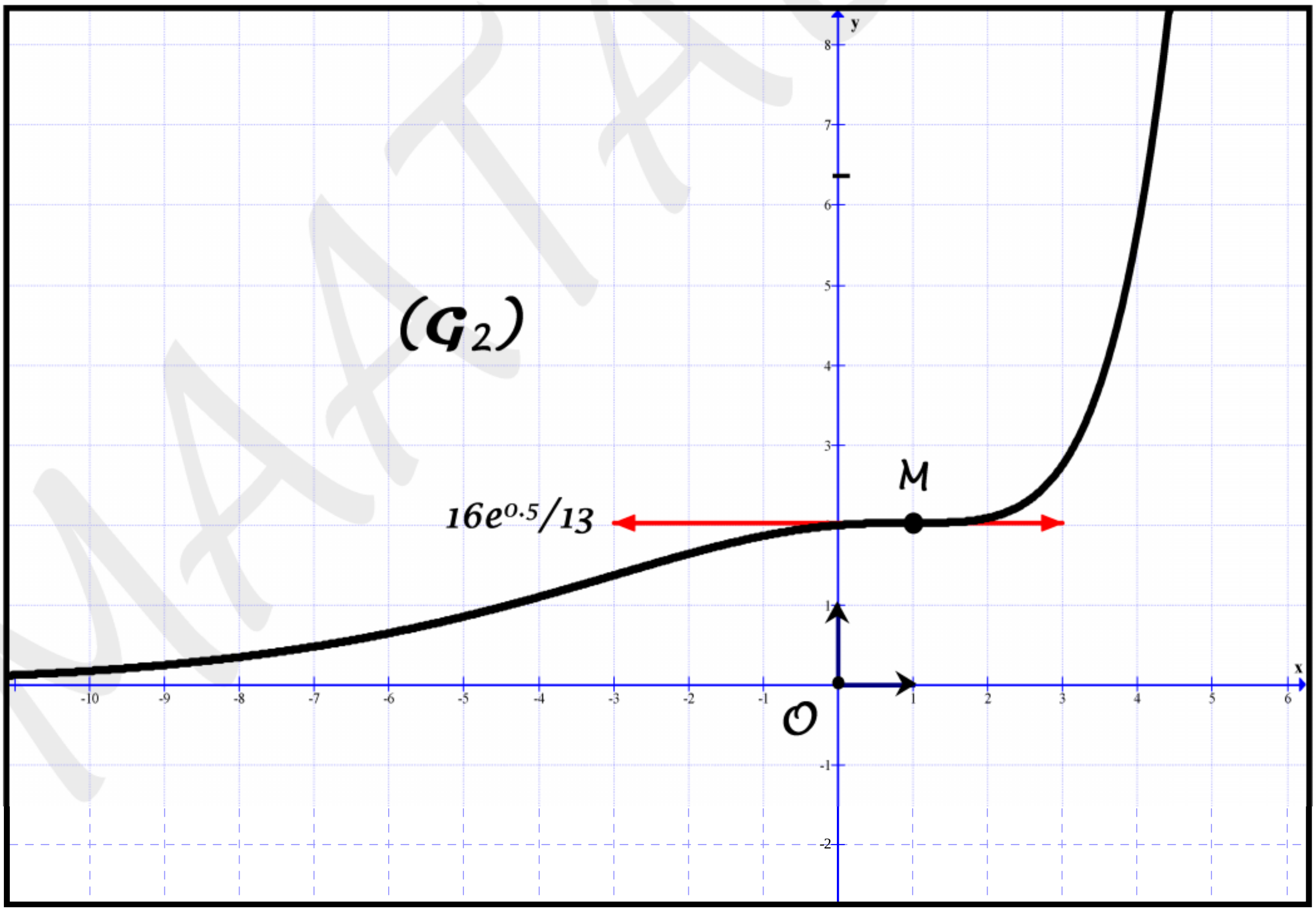
2) a) Montrer que l'équation : $f_2(x) = x$ admet , dans $\left[\frac{5}{3}, 2\right]$, une solution unique α .

b) Montrer que la restriction g de f_2 sur $[1, +\infty[$ est bijective . Construire la courbe (Γ) de g et la courbe (Γ^{-1}) de g^{-1} dans un même repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. (On prendra pour unité graphique 2 cm)

c) Déduire , en fonction de α , l'aire du domaine limité par (Γ) , (Γ^{-1}) et les axes du repère .

(On prendra $F(\alpha) = 2$) .





Bonne chance et excellente réussite au Baccalauréat