Direction régionale de l'éducation de Monastir	Epreuve : Mathématiques
■■■■■■	Section : Mathématiques
Lycée Ibn Khaldoun Jemmel	Durée : 4h — Coefficient : 4
■■■■■■	
Mr:Afli Ahmed	**Bac Blanc** 17 - 05 - 2019

Exercice n°1 :(4 points)

Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en electricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages.

Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme decrit comme suit :

Le premier jour la ville est délestée.

-si la ville est délesteun jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$

-si elle n'est pas délesté un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$

On désigne par D_n l'évenement : « la ville est délesté le jour n » et p_n la probabilité de D_n

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où la ville est délestée au cours des trois premiers jours.

1.)a.Montrer que $p(X = 2) = \frac{133}{162}$

b.Déterminer la loi de probabilté de X.

2.)Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a $p_{n+1} = -\frac{11}{18}p_n + \frac{5}{6}$

3.)Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 6p_n - \frac{90}{29}$

a.Montrer que (v_n) est une suite géometrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

c. Un match de football doit se jouer le vingtième jour.

Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage.

4.) La durée de vie T, exprimée en mois, des lampes utilisées par les habitants de la ville suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$.

a. Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une lampe dépasse une année ?

b. Une lampe a fonctionné pendant six mois, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse deux ans ?

c. Dans une maison de cette ville, il y a dix lampes qui fonctionnent de manières indépendantes.

Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles fonctionnent plus qu'une année ?

Exercice n°2 :(4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A le point de coordonnées (3,2).

Soit N un point de l'axe $(O,\vec{u})$ et P le point de l'axe $(O,\vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

1.) a. Soit les points E(3,0) et F(0,2).

Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F.

Donner son rapport et son angle.

b. Déterminer l'image de l'axe $(O,\vec{u})$ par S.

c. En déduire que S(N) = P.

d. Soit M un point d'affixe z et M ' le point d'affixe z ' tel que M ' = S(M).

Montrer que : $z' = -\frac{3}{2} i z + \frac{13}{2} i$

2.) a. On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.

Montrer que 3x + 2y = 13.

b. Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

Exercice n°3 :(4 points)

1.) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : 2019 x + 2018 y = 3.

2.) a. Justifier que : pour tout entier x, $x^{673} \equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$ et que $x^{673} \equiv x(\mathrm{mod}\ 673)$.

b. En déduire que $x^{673} \equiv x(\mathrm{mod}\ 2019)$ pour tout entier x.

c. Prouver : $x^{1009} \equiv x(\mathrm{mod}\ 2018)$ pour tout entier x.

3.) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $2016\, x^{673} + 2x - 3 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2019)$.

a. Soit x une solution de (F), montrer que : $x \wedge 2019 = 3$.

b. Prouver que : (x solution de (F) si et seulement si (2018 x ≡ 3 (mod 2019))

c. En déduire l'ensemble de solutions de (F).

4.) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, le système (S) : $\begin{cases} (x+2)^{673} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2019) \\ (x+1)^{1009} \equiv 3(\mathrm{mod}\ 2018) \end{cases}$

Exercice n°4 : (8 points)

Soit f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^{x}}$$

Et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A-1.) Dresser le tableau de variation de f.

2.) a. Déterminer les branches infinies de (C).

b. Tracer (C).

3.) a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

b. Tracer la courbe (C') représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f.

c. Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$.

4.) a. Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = e^{x} - \frac{e^{x}}{1 + e^{x}}$

b. Soit λ un réel strictement négatif.

Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C'), l'axe des ordonnées et les droites d'équations respectives : $y = \lambda$ et $y = 0$.

B-Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel négatif x, On pose $F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1 + e^{t}} dt$

1.) a. Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim_{x \to -\infty} F_1(x) = \ln(2)$.

b. Calculer $\lim_{x \to -\infty} F_2(x)$.

2.) a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n}(1 - e^{nx})$.

b. Montrer par récurrence sur n, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Dans la suite de l'exercice on pose $R_n = \lim_{x \to -\infty} F_n(x)$.

3.) a. Vérifier que pour tout réel $t \leq 0$, $2e^{t} \leq 1 + e^{t} \leq 2$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout réel $x \leq 0$, on a :

$$\frac{1}{2n}(1 - e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}\left(1 - e^{(n-1)x}\right)$$

c. En déduire un encadrement de R_n pour $n \geq 2$.

4.) Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul n, on pose $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt} dt$

a. Calculer $G_n(x)$ et Montrer que $\lim_{x \to -\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$

b. Montrer que $G_1(x) + G_2(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + G_n(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$.

5.) On pose, pour tout entier naturel non nul, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a. Montrer que $u_n = \ln 2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$

b. Montrer que la suite (u_n) converge et trouver sa limite.