

<b>Lycée Takelsa</b> <b>Prof :Mourad Ziadi</b> <b>Classe :4<sup>ème</sup> Math</b>	<b>Devoir de Contrôle N :3</b> <b>Epreuve :Mathématiques</b>	
	<b>Date :19/04/2017</b>	<b>Durée : 2h</b>

**Exercice N :1 (03pts)** Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse.

- 1) La parabole de foyer F(1,0) et de directrice D :  $x = -1$  à pour équation :  $x = \frac{1}{4}y^2$ .
- 2) L'ellipse d'équation :  $9x^2 + 4y^2 = 36$  à pour excentricité  $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .
- 3) L'entier 5 est un inverse modulo 6 de 5.

**Exercice N :2(06pts)**

A) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x}$ .

On désigne par  $\zeta$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1)a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Calculer  $f(1)$ . En déduire le signe de  $f(x)$  pour  $x \in ]0, +\infty[$ .

d) Montrer que  $I(1,0)$  est un point d'inflexion de la courbe  $\zeta$ .

2)a) Tracer la courbe  $\zeta$ .

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $\zeta$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

3) a) Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . Montrer que  $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ .

b) En déduire que pour tout  $x > 0$  on a :  $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$

B) Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $U_n = \sum_{k=1}^n \ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)$ .

1) Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $U_3$ .

2) a) Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissante.

b) Vérifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .

c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}$ .

d) En déduire que  $(U_n)$  est convergente vers un réel  $\ell$  et que  $0,7 < \ell \leq 1$ .

### Exercice N :3 (06pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On désigne par (H) l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que :  $x^2 - y^2 - 1 = 0$

1) a) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets, les directrices et les asymptotes.

b) Tracer (H).

2) Soit  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par (H) et la droite d'équation :  $x = \sqrt{2}$ . Montrer que  $A = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2 - 1} dt$ .

3) Soit  $F$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_1^{g(x)} \sqrt{t^2 - 1} dt$ . où  $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et que pour tout  $x \geq 0$  on a :  $F'(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}$

b) En déduire  $F(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

c) Calculer  $g(\ln(1 + \sqrt{2}))$ . En déduire  $A$ .

4) Soit  $\zeta = \{M(x, y) \text{ tels que } y = \sqrt[4]{x^2 - 1} \text{ et } x \in [1, \sqrt{2}]\}$ . On désigne par  $\mathcal{G}$  le volume engendré par la rotation de  $\zeta$  autour de l'axe des abscisses.

Montrer que  $\mathcal{G} = \frac{\pi}{8} \left[ (1 + \sqrt{2})^2 - 4 \ln(1 + \sqrt{2}) - (1 + \sqrt{2})^{-2} \right]$ .

### Exercice N :4(05pts)

Soit  $a$  un entier naturel tel que  $0 < a < 5$ .

1) a) Montrer que pour tout entier naturel  $k$  on a :  $a^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$ .

b) En déduire suivant l'entier naturel  $n$  le reste modulo 5 de  $3^n$ .

c) Déterminer, alors le reste modulo 5 de l'entier  $A = 2016^{2015} + 2017^{2016} + 2018^{2017}$ .

2) Pour tout entier naturel  $n$  on pose :  $S_n = \sum_{k=0}^n 3^k$ .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $2S_n = 3^{n+1} - 1$ . b) En déduire que  $S_n$  et  $3^n$  sont premiers entre eux.

3) a) Soit  $\beta$  un entier. Montrer que  $2S_n \equiv \beta \pmod{5} \Leftrightarrow S_n \equiv 3\beta \pmod{5}$ .

b) En déduire le reste de la division euclidienne de  $S_{2017}$  par 5.

4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $3^n x + S_n y = 1$ .

a) Justifier que (E) admet au moins une solution dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

b) Montrer que les solutions de (E) sont les couples  $(x, y)$  tels que  $x = 3 + kS_n$  et  $y = -2 - 3^n k$ . avec  $k \in \mathbb{Z}$

c) Résoudre, alors dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  le système suivant : 
$$\begin{cases} 9x + 13y = 1 \\ x \equiv y \pmod{3} \end{cases}$$

