Lycée Ibn Khaldoun Jammel A.S 2015/2016	Devoir de Contrôle n°3 Mathématiques	Mr : Afli Ahmed Classe : 4M Durée : 120mn

❖ **Exercice n°1 :** (5 pts)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points A(2,0,0) ; B(1,1,0) et C(3,2,6).

1. a. Calculer l'aire du triangle ABC.
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C.
2. Soit la droite Δ passant par le point F (2,4,4) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.
   a. Montrer que Δ est perpendiculaire à P puis donner une représentation Paramétrique de Δ .
   b. En déduire les coordonnées du point H le projeté orthogonal de F sur le plan P .
   c. Calculer le volume du tétraèdre FABC
   d. Donner une équation cartésienne de la sphère de centre F et tangente au plan P
3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport -3
   Déterminer le centre et le rayon de la sphère S ' l'image de S par h , puis montrer que P et S ' sont tangents.

❖ **Exercice n°2 :** (5points)

1.) On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) : 91x + 10y = 1.

a. Enoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution de l'équation (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution de l'équation

(E') : 91x+10y = 412

c. Résoudre (E ').

2.) Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, *où* n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.

3.) On considère l'équation (E'') : $A_3x + A_2y = 3296$.

a. Déterminer les couples entiers relatifs (x , y) solutions de l'équation (E'').

b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

❖ **Exercice n°3 :** (4 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit la courbe (E_m) d'équation :

$$\frac{x^2}{(m+1)^2} + \frac{y^2}{m+1} = 1 \qquad \text{(m est un paramètre réel strictement positif).}$$

1.) a. Montrer que (E_m) est une ellipse dont on précisera les sommets et les directrices.

b. Construire (E_3) .

c. Vérifier que le point $M\left(\frac{(m+1)}{2} ; \frac{\sqrt{3(m+1)}}{2}\right)$ appartient à (E_m) .

2.) Soit S le sommet principal d'abscisse positive et B le sommet secondaire d'ordonnée positive de (E_m) .La droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par M coupe le segment [SB] en un point K.

a. Montrer que les coordonnées de K sont $\left(\frac{(m+1)}{2} ; \frac{\sqrt{m+1}}{2}\right)$.

b. En déduire que K appartient à la parabole P dont une équation est : $y^2 = \frac{1}{2}x$.

c. Déterminer le foyer et la directrice de P, puis construire P dans le même repère.

❖ **Exercice n°4 :** (6 pts)

On donne ,dans la feuille Annexe, ci jointe , (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé

(O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) de la fonction réciproque f^{-1}d'une fonction f continue et strictement monotone sur]0,+∞[. La courbe (C) admet les droites d'équations y = x et y = 0 comme asymptotes et coupe l'axe des ordonnées en A(0, ln(2))

1.) a. Par lecture graphique déterminer : $f^{-1}(0)$; $\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim_{y\to+\infty}[y - f(y)]$

b. En déduire : $\lim_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Tracer la courbe (C') de f , dans le même repère (O, I,J) que (C) , sur la feuille ANNEXE

2.) En réalité on connait que : $f^{-1}(x) = \ln(e^{ax} + b)$, *où* a et b sont des réels strictement positifs.

a. Vérifier que $f^{-1}(x)$= a.x + ln(1+be^{-ax}), pour tout réel x strictement positif.

b. Montrer que a = b = 1.

c. En déduire que pour tout réel x strictement positif, f(x) = ln(e^x −1).

3.) On considère la suite (I_n) telle que : ∀ n ∈ ℕ* , $I_n = \int_{1}^{n} e^{-x}\ln(e^x - 1)dx$.

a. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

b. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^n xe^{-x}dx$ .en déduire que pour tout n ∈ ℕ* ;

$$0 \le I_n \le -(n+1)e^{-n} + \frac{2}{e}$$

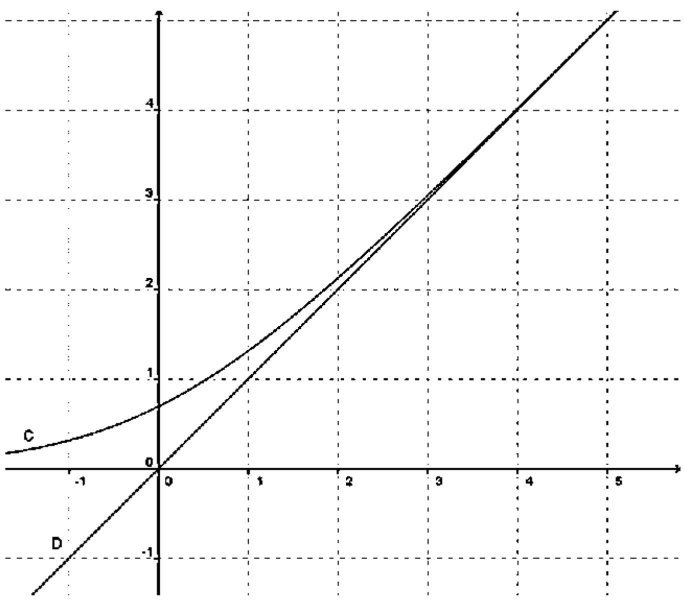
c. Montrer que la suite (I_n) est convergente.

4.) a. Vérifier que : ∀ x ≠ 0 ; $\frac{1}{e^x-1} = \frac{e^x}{e^x-1} - 1$

b. Montrer en s'aidant d'une intégration par parties que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)\ln(e^n - 1) - n + \left(\frac{1}{e} - 1\right)\ln(e-1) + 1$$

c. En déduire la limite de I_n, lorsque n tend vers +∞.



Annexe : Exercice 4