Moêz Saidani

DEVOIR DE CONTROLE N 3

Bac maths

EXERCICE N 1 *5 points*

1. (a) Déterminer les restes possibles de la division de $2; 2^2; 2^3...$ et 2^n $(n \in \mathbb{N})$ par 9
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2^{2n}(2^{2n+1}-1)-1 \equiv 0\,[\text{mod}\,9]$

   (a) Soit p un nombre premier. Et on suppose que $p \geq 5$. montrer que $p^2 \equiv 1\,[\text{mod}\,3]$ et $2^p \equiv 2\,[\text{mod}\,3]$ et déduire que p^2+2^p n'est pas premier.
   (b) Montrer que p^2+2^p est premier alors $p=3$
   (c) Montrer que si p divise p^2+2^p alors $p=2$.

EXERCICE N 2 *6 points*

n un entier naturel non nul .

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + \dfrac{e^{-x}}{n}$ et (ξ_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

   (a) Etudier la branche infinie de (ζ_n) au voisinage de $-\infty$
   (b) Montrer que la droite D d'équation $y=x$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$. Etudier la position de (ζ_n) par rapport à D

2. Dresser le tableau de variation de f_n et construire (ζ_3) (on prend $f_3(-1.5)\approx 0; f_3(-0.6)\approx 0; \ln 3 \approx 1.1$)

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a : $\dfrac{e}{n} \leq \ln n$
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 3$ l'équation $f_n(x)=0$ possède exactement deux solutions x_n et y_n avec $x_n \leq y_n$, $x_n \leq -\ln n$ et $-\dfrac{e}{n} \leq y_n \leq 0$
   (c) Calculer $\lim x_n$ et $\lim y_n$

3. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} g(x) & = -1 - x\ln x \;; x>0 \\ g(0) & 1 \end{cases}$

   (a) Montrer que g est continue à droire en 0
   (b) Vérifier que pour tout $n \geq 3$; $g\left(\dfrac{-1}{x_n}\right) = \dfrac{\ln n}{x_n}$ et déduire $\lim \dfrac{\ln n}{x_n}$.

EXERCICE N 3 *5 points*

Une urne contenant trois boules noires numéroteés $1; 2; 2$ et deux boules blanches numéroteés $1; 1$, toutes les boules sont indiscernables au toucher

1. On tire simultanément deux boules de l'urne
   (a) Déterminer la probabilité d'avoir deux boules de même couleur
   (b) sachant que les boules tireés sont de même couleur,calculer la probabilité qu'elles sont de même numéro
2. Maintenant ; on tire les boules une à une sans les remettre. On désigne par X le rang de la deuxieme boule blanche tireé
   (a) Donner la loi de X
   (b) représenter la fonction de répartition F_X
   (c) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$

EXERCICE N 4 *4 points*

On considère l'équation différentielle :$(E) : y' + 2y = \dfrac{2e^{-x}}{1 + 2e^{x}}$

1. Vérifier que la fonction f est une solution de (E) tel que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = e^{-2x}\ln(1 + 2e^{x})$
2. Montrer qu'une fonction φ solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est une solution de l'équation différentielle :$(E') : y' + 2y = 0$
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

bon courage

sujet traité par LaTeX