DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7C — *Durée :4H* — *Proposé le 17 février 2012 de 8h à 12h*

Exercice 1 (3 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

1.a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $(\cos^2\theta)z^2-(2\cos^2\theta)z+1=0$

b) On note $z_1;z_2$ les solutions de (E) avec $\operatorname{Im} z_1\geq 0$. Ecrire $z_1;z_2$ sous forme exponentielle. Justifier.

2.a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$: $\frac{1}{\cos\theta}=\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}$

b) On pose $F(t)=\int_0^t|z_1|d\theta$ où $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Donner l'expression de $F(t)$ en fonction de t puis calculer l'intégrale :

$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}|z_1|d\theta$. L'écriture $|z_1|$ désigne le module de la solution z_1 de l'équation (E).

Exercice 2 (4 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On définit les points suivants : O est le pied de la hauteur issue de A, E est le milieu du segment $[CO]$ et F est le symétrique de A par rapport à B.

On cherche à montrer que $(AE)\perp(OF)$ et ce par trois méthodes. (On pourra prendre (BC) horizontale).

1) Nombres complexes :

On pose $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ et on rapporte le plan au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de sens $\overrightarrow{OC}$ et $\vec{v}$ est un vecteur unitaire de sens $\overrightarrow{OA}$.

a) Montrer que $a^2-bc=0$.

b) Donner les affixes des points O,A,B,C,E,F en fonction de a,b,c.

c) Montrer que le rapport $\frac{z_E-z_A}{z_F}$ est imaginaire pur. Conclure.

2) Produit scalaire :

Calculer $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AO})\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})$. Conclure.

3) Configurations :

Soit M le milieu de $[AO]$.

a) Montrer que M est l'orthocentre du triangle ABE.

b) En déduire que $(AE)\perp(BM)$. Conclure.

Exercice 3 (4 points)

1) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$.

Dresser le tableau de variation de φ et tracer sa courbe Γ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) On considère la fonction u définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $u(x)=\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}$.

Calculer $u'(x)$ et déterminer l'expression de $u(x)$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Pour tout réel x on pose : $f(x)=\int_x^{2x}\frac{t^2}{1+t^2}dt$.

a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ puis qu'elle est impaire.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que pour tout $x>0$: $\frac{x^3}{1+x^2}\le f(x)\le\frac{4x^3}{1+4x^2}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

4. a) Montrer que pour tout $x>0$: $\frac{x}{1+4x^2}\le x-f(x)\le\frac{x}{1+x^2}$.

b) En déduire que C_f admet une asymptote Δ et préciser la position relative de C_f et Δ.

c) Tracer C_f et Δ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On précisera la tangente à C_f en O.

Exercice 4 (4 points)

On définit pour tout entier naturel $n\ge1$, l'intégrale : $I_n=\int_0^2\frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_1=e^2-3$.

2) Etablir que pour tout $n\ge1$, $0\le I_n\le\frac{2^n}{n!}(e^2-1)$.

3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n\ge1$: $I_{n+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

4) En déduire que $e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+...+\frac{2^n}{n!}+I_n$.

5) On pose pour tout entier naturel $n\ge1$, $u_n=\frac{2^n}{n!}$.

a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n\ge3$, $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n\ge3$, $0\le u_n\le u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

c) En déduire la limite de (u_n) puis celle de (I_n).

d) On pose $S_n=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+...+\frac{2^n}{n!}$. Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=e^2$.

e) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n\ge n_0$; S_n soit une valeur approchée de e^2 à 10^{-2} près.
Ecrire S_{n_0} sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 5 (5 points)

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $g(x)=x-\ln(1+x)$.

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

(C) et (C') désignent les courbes représentatives respectives de g et f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Dresser le tableau de variation de g.

b)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$. Interpréter.

c) Préciser la tangente à (C) en O(0,0) et tracer (C).

2.a) Vérifier que pour tout réel x strictement positif ; $f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$

b) Déduire le tableau de variation de f de celui de g.

c) Tracer la courbe (C') de f dans le repère précédent et préciser les positions relatives des courbes (C) et (C').

3) Soit A_n l'aire du domaine plan limité par les courbes (C) , (C') l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{1}{n}$ et $x=n$.

a) Ecrire A_n sous forme d'intégrale.

b) Exprimer A_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

4) On définit les suites numériques (U_n) , (F_n) et (S_n) pour tout entier naturel n non nul :

$$U_n = \sum_{k=n}^{k=2012n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2012n}$$

$$F_n = \sum_{n}^{2012n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2012n)$$

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2012n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2012n(2012n+1)}$$

a) Vérifier que $\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{n} - f(n)$. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \le f(n) \le \frac{1}{n(n+1)}$, puis que $0 \le F_n \le S_n$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout entier $n > 0$, on ait $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$. En déduire que $S_n = \frac{2011n+1}{n(2012n+1)}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n$.

c) Vérifier que pour tout entier $n > 1$, $F_n = U_n - \ln\left(2012 + \frac{1}{n}\right)$.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Fin.

Etablissements participants :

Ayoun
Baraka
Bourge Elilm
Chems Dine
Dar Elouloum
Elhouda
Elislah
Elkhiyar
Elmaarif
Ennasr
Erraja
Kiffa
Nouadhibou
Rosso
Zemzem
Zouerate