Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		Année scolaire : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n° 3	Durée : 4 heures
Professeur : Maâtallah	Date : Le 23-04-2011	Classe : $4M_{1,2}$

Exercice n° 1: (2 points)

Pour chacune des affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effect

1) L'ensemble des solutions, dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation : $24x + 35y = 9$ est $\{(-144+70k\,;\,99-24k)\,,\,k \in \mathbb{Z}\}$

2) Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation : $11x - 5y = 14$

les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14\,,11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

3) La similitude indirecte qui au point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = (1 - i)\bar{z} + 2i$ a pour centre $I(2i$

4) La similitude directe de rapport 2 , d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre $J(1 - i)$ a pour écriture complexe :

$z' = (\sqrt{3} + i)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Exercice n° 2: (3 points)

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. Soit $(1,1,1)$, $B(1,2,3)$ et $C(0,0,1)$ des points de l'espace.

1) a) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre $OABC$. En déduire la distance de O au plan $(ABC$

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P passant par A , B et C est : $2x - 2y + z - 1 = 0$

2) Soit (S) la sphère dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$

a) Montrer que (S) et P se coupent suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre H et le rayon r .

b) Déterminer une équation de la sphère (S') coupant P suivant le cercle $(\mathcal{C})$ et passant par $D(1\,,-1,-1)$.

3) Soit h l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que

$$\begin{cases} x' = -3x + .8 \\ y' = -3y + 4 \\ z' = -3z - 4 \end{cases}$$

a) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre J et le rapport k .

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(S_1) = h((S))$ et le plan $P_1 = h(P)$.

Exercice n° 3: (4 points)

1) Soit , dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $4312\,x - 1755\,y = 1$

a) Prouver que (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Déterminer une solution particulière de (E) . Résoudre , dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) .

2) a) Déterminer , suivant les valeurs de n , les restes modulo 10 de 7^n .

b) En déduire le chiffre des unités de $N = 2007^{2011}$.

3) Soit ,dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E') : $5\,x - 7y = 2016$.

a) Montrer que pour tout couple (x,y) solution de (E') , x est divisible par 7 .

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E') .

Exercice n° 4: (4 points)

Soit un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\;[2\pi]$. Soit P, J, I, K et Q les milieux respectifs des segme $[BC]$, $[CD]$, $[JD]$, $[JP]$ et $[AD]$. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et h l'homothétie de centre J et de rapport 2 .

1) a) Soit l'application $S = R \circ h$. Déterminer $S(I)$ et $S(O)$. Caractériser S puis construire ω le centre de S .

b) Montrer que $S(K) = J$ et $S(J) = Q$. En déduire que les points K, ω et Q sont alignés .

c) Déterminer les images des droites (OP) et (JP) par S . Construire le point L image de P par S .

2) a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f tel que $f(L) = D$ et $f(Q) = B$.

b) Montrer que $g = f \circ S$ est une similitude indirecte de rapport 2 . Déterminer $g(J)$ et $g(P)$.

c) Prouver que C est le centre de g et que (AC) est son axe .

3) On désigne par $(\mathcal{C}_1)$ le cercle de centre O et passant par ω et $(\mathcal{C}_2)$ le cercle de centre P et passant par ω . $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ se coupent en F . Soit H et F' les points tels que $S(H) = F$ et $S(F) = F'$.
Déterminer l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par S . Montrer que $O = F \,\square\, H$ et $P = F \,\square\, F'$ et que $(F'P)$ est la tangente à $(\mathcal{C}_1)$ en F .

Exercice n° 5: (7 points)

Soit la fonction f définie par : $f(0) = 0$ et $\forall\, x > 0$, $f(x) = \frac{x}{x - ln(x)}$. (C_f) est sa courbe dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

I) 1) Etudier f et construire (C_f) . On précisera la demi-tangente T et la tangente T' à (C_f) respectivement au point d'abscisse 0 et au point d'abscisse 1 .

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in [0, e]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) est une suite convergente et déterminer sa limite .

II) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = f(x^n)$. On note (C_n) sa courbe dans un repèr orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ On a représenté dans l'annexe la courbe (C_2) . $(D : y = 1) \cap (C_2) = \{ I \}$

1) Dresser le tableau de variation de f_n .

2) Montrer qu'une équation de la tangente T_n à (C_n) au point d'abscisse 1 est : $y = nx - n + 1$. construire (C_5) , T_2 et T_5 dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3) Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire du domaine limité par (C_n) , $\Delta : y = x$ et les droites : $x = 0$ et $x = 1$.

a) Montrer que $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante . Déduire qu'elle converge .

b) Pour n grand , on confond $\mathcal{A}_n$ à l'aire du domaine limité par T_n , $\Delta : y = x$ et la droite : $y = 0$. Soit J_n le point d'intersection de T_n et $(O, \vec{\imath})$. Calculer l'aire du triangle OIJ_n est . Déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}$

4) a) Montrer que $\forall\, n \geq 3$, $f_n(x) = x$ admet dans $[\sqrt[n]{e}, +\infty[$ une solution unique α_n .

b) Soit $x \geq 1$. Vérifier que $x - ln(x) \geq 1$ puis montrer que $\forall\, n \geq 3$, $f_n(x) - x \leq (n+1)x^n$.

c) Soit $n \geq 3$ et $I_n = \int_1^{\alpha_n} f_n(x) - x\, dx$. Montrer que : $0 \leq I_n \leq {\alpha_n}^{n+1} - 1$.

d) Pour n grand , on admet qu'il existe $\alpha \in]1,2[$ tel que $\alpha_n \simeq 1 + \frac{\alpha}{n^2}$. Soit $\mathcal{A}'_n$ l'aire du domaine limité pa (C_n) , $\Delta : y = x$ et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \alpha_n$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{A}'_n$.

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et la bonne présentation

<u>Nom et prénom :</u>......................................DC3 $4M_{1,2}$ A rendre avec la copie