LYCEE BOULBABA	DEVOIR DE CONTROLE N°3	Azaiez
GABES	$4M_1$ (2h) 2010/2011	

EXERCICE : 1 (4pts)

Cocher la réponse exacte

1) *l'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-1)\ln x > 0$ est*

a) $]0,+\infty[\setminus \{1\}$ b) $]1,+\infty[\setminus \{e\}$ c) $]e,+\infty[$

2) *l'ensemble des solutions de l'équation $e.\,e^{x^2} = e^{-x}$ est*

a) $\varnothing$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{0, 1\}$

3) $\left(e^{x+1}\right)^2 \times e^{2x} =$

a) $e^{(x+1)^2 \times 2x}$ b) $e^{x^2+2x+1} \times e^{2x}$ c) e^{4x+2}

4) Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par: $g(x) = 2 + e^{-x} + \dfrac{1}{x}$

Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui correspondent à une primitive de la fonction g ?

a) $G(x) = 2x + e^{-x} + \ln x$ b) $G(x) = 2x - e^{-x} - \dfrac{1}{x^2} + 1$ c) $G(x) = 2x - e^{-x} + \ln x + 5$

EXERCICE : 2 (6pts)

1/a)quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11

b) quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5

c) en déduire que $6^{40} - 1 \equiv 0(11)$ et $6^{40} \equiv 1(5)$

d) déduire que 6^{40} - 1 est divisible par 55

2/ dans cette question x et y désignent des entiers relatifs

a) montrer que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution

b) montrer que l'équation (E ') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution

c) déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de (E')

d) résoudre (E ')

prouver qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1(40)$

trouver cet entier

3) pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b(55)$ et si $a^{40} \equiv 1(55)$ alors $b^{33} \equiv a(55)$

EXERCICE : 3 (6pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} (2\pi)$ .on pose $D = S_A(C)$, $E = S_B(D)$ et H le projeté orthogonal de A sur (BC)

1/ soit S la similitude directe définie par : S(A) = B et S(B) = C

a) déterminer le rapport k et l'angle θ de S

b) montrer que S(C) = D

2/ soit Ω le centre de S

a) montrer que Ω est le point défini par $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$ et $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega C}) \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

b) construire alors le point Ω

3/ le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

a) déterminer l'écriture complexe de la similitude S

b) déterminer alors l'affixe z_0 de Ω

4/ soit σ la similitude indirecte définie par $\sigma(A) = B$ et $\sigma(B) = C$

Caractériser σ

5/ on pose $\varphi = \sigma \circ S^{-1}$

a) montrer que φ est une symétrie orthogonale que l'on caractérisera

b) déterminer alors σ (C)

6/ soit $f : \mathscr{P} \longmapsto \mathscr{P}$; $M(z) \longmapsto M'(z')$ tel que $z' = (-1 - i)\,\overline{z} + 1$

a) montrer que f est une similitude indirecte

b) montrer que $f = \sigma$

EXERCICE : 4 (6pts)

On note *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$. On note C la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

1/. Démontrer que $f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x+1)$

2/ Dresser le tableau des variations de la fonction *f*

3. Tracer la courbe C dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout entier naturel *n* > 2 on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$.

4/a) calculer I_2.

b) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel *n* > 2 :

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) I_n.$$

c) Calculer I_3.

5/ étude de la limite de la suite de terme général I_n

a) établir que pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle [1 ; 2], on a : $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.

b) en déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).