L. Regueb	Mathématiques	Classe : 4ème M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Contrôle№3	Le : 28/04/2011 Durée : 2h

Exercice1(6pts)

1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit N un nombre entier naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a) Montrer que le couple (a ; -b) est solution de (E).

b) Quel est le reste, dans la division euclidienne de N par 40 ?

3)a) Résoudre l'équation (E') : $8x + 5y = 100$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Un groupe composé de garçons et de filles a dépensé 100 dinars dans une salle de jeux.

Les garçons ont dépensé 8 dinars chacun et les filles 5 dinars chacune .

Combien pouvait-il y avoir de garçons et de filles dans le groupe ?

Exercice2(6pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et α est un paramètre de l'intervalle $]0 ,\pi[$.

On note (S_α) l'ensemble des points M(x , y , z) tels que :

$$OM^2 - 2\cos(\alpha)\left[\overrightarrow{OM}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\right] + 3 - 4\sin^2(\alpha) = 0$$

1)a) Donner une équation cartésienne de (S_α).

b) Montrer que (S_α) est une sphère , on note I_α son centre et R_α son rayon.

Prouver que I_α appartient à une droite fixe Δ.

2)a) Déterminer les sphères (S_α) passant par l'origine du repère.

b) Montrer que O est le milieu de $[I_{\pi-\alpha}\, I_\alpha]$.

c) En déduire que (S_α) et $(S_{\pi-\alpha})$ sont symétriques par rapport à O.

3) Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$

a) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de I_α sur P.

b) Préciser l'intersection de P et (S_α).

Exercice3(8pts)

Soit la fonction f définie sur$]-\infty;0]$ par : $f(x)=\sqrt{1-e^x}$

On désigne par φ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$(unité 2 cm)

1)a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 puis interpréter graphiquement ce résultat.

b) Etudier les variations de f sur $]-\infty;0]$

2) a)Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty;0]$ sur $[0;1[$.

b) Tracer φ_f *et* $\varphi_{f^{-1}}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3)a) Montrer que pour $x\in[0;1[, f^{-1}(x)=\ln(1-x^2)$.

b) Soit $F(x)=(x-1)\,ln(1-x)+(x+1)\,ln(x+1)-2x$ pour $x\in[0;1[$

Montrer que F est une primitive de f^{-1}sur $[0;1[$

c)Soit A l'aire en cm^2 de la partie limitée par la courbe $\varphi_{f^{-1}}$ et les droites d'équations respectives $y=-\ln(2)$, $x=0$ et $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Montrer que $A=\left(8\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-4\sqrt{2}\right)cm^2$

d)Déduire alors la valeur de l'intégrale $\int_{-\ln(2)}^{0}\sqrt{1-e^x}\,dx$