L.S :02/03/34 Goubellat Date : 13/05/2011 Classe : 4^{eme} *année* Prof :Hamdi	**Devoir de Synthèse N°2** **Section : Mathématiques** **Epreuve : Mathématiques** **Durée :4h** **Coefficient :4**

EXERCICE N° 1 (3 Pts)

Indiquer la réponse exacte

I°) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$

1°) L'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'equations respectives $x = \dfrac{e}{4}$ et $x = 1$ est :

a°) $-1 + \text{Log } 4$; b°) $1 - \text{Log } 4$; c°) 1

2°) Le volume de solide S obtenu par la rotation de la courbe (C) autour de l'axe $(O, \vec{I})$ tel que $\dfrac{e}{4} \leq x \leq 1$ est:

a°) $\dfrac{4}{e} - 1$; b°) $\pi\left(\dfrac{4}{e} - 1\right)$; c°) $\dfrac{4\pi}{e}$

II°) $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \left(\dfrac{1}{x+1} + e^{\frac{-1}{x+1}} \right) = L$ alors on a :

a°) $L = +\infty$; b°) $L = 0$; c°) $L = -\infty$

III°) On pose pout tout entiers n , $a = 3n + 2$ et $b = n - 2$ et on pose $d = a \wedge b$ alors on a :

a°) $8 \equiv 1 \, [d]$; b°) $8 \equiv 2 \, [d]$; c°) $8 \equiv 0 \, [d]$

IV°) a°) $51^{46} \equiv 0 \, [47]$; b°) $51^{46} - 1 \equiv 0 \, [47]$; c°) $51^{46} - 1 \equiv 1 \, [47]$

EXERCICE N° 2 (4 Pts)

L'espace ε est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

On considère le tétraèdre ABCE tel que A (1 , 1 , 1) ; B (1 , 2 , 3) ; C (3 , 2 , 1) et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

1°) a) Vérifier que E a pour coordonnées (- 1 , 5 , - 1)

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE

2°) a) Soit P le plan d'équation : $2x - 4y + 2z + 18 = 0$. Montrer que P est parallèle au plan (ABC)

b) Soit K le point défini par : $3\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan P

3°) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K

a) Déterminer le rapport de h

b) le plan P coupe les aretes $[EA]$ et $[EB]$ respectivement en I et J

Calculer le volume du tétraèdre EIJK

EXERCICE N° 3 (5 Pts)

On considère dans un plan P orienté un triangle équilatéral ABC de sens direct . On désigne par I et J les milieux respectif de $[AB]$ et $[AC]$ et par D le symétrique de A par rapport à C

1°) a) Montrer qu' il existe un unique antidéplacement f qui envoie C sur A et A sur B

b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur

2°) Soit g la similitude directe telle que : g (B) = D et g (I) = C

a) Montrer que g (A) = A

b) Déterminer les éléments caractérisitiques de g

3°) Soit Ω le point défini par : $\overrightarrow{\Omega A} + 2\,\overrightarrow{\Omega I} = \vec{0}$

a) Justifier que (f o g) est une similitude indirecte

b) Déterminer (f o g) (I) et (f o g) (A)

c) Vérifier que $\overrightarrow{\Omega B} + 2\,\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$

d) En déduire que (f o g) (Ω) = Ω

4°) a) Déterminer le rapport de la similitude (f o g)

b) Montrer que l'axe de la similitude (f o g) est la perpendiculaire en Ω à la droite (AB)

EXERCICE N° 4 (5 Pts)

Soit f la fonction définie sur □ par : $f(x) = x\,e^{\frac{1-x}{2}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$

1°) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées

c) Tracer (C)

d) Montrer que pour tout réel x de $[0, 1]$ on a :

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

2°) On pose pour tout n de □ *

$$I_n = \frac{1}{n!\,2^{n+1}} \int_0^1 x^n\, e^{\frac{1-x}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad U_n = 1 + \frac{1}{1!\,2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n!\,2^n}$$

a) A l'aide d'une intégration par parties vérifier que $I_1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$

b) Montrer que pour tout n de □ * ,on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}}$

c) Démontrer ,par récurrence, que pour tout n de □ * on a: $U_n = \sqrt{e} - I_n$

d) Montrer que pour tout n de □ * ,on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n\,(n!)\,2^{n+1}}$

e) En déduire la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

EXERCICE N° 5 (3 Pts)

On considère dans □ × □ l'équation (E) : 8 x + 6 y = 2

1°) a) Vérifier que (1 , - 1) est une solution de (E)

b) Résoudre dans □ × □ l'équation (E)

2°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O , \vec{I} , \vec{J})$, on considère la droite Δ dont une équation est : $8x + 6y - 2 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 1

a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entieres alors AM est un multiple de 10

b) Soit N un point de Δ de coordonnées (x , y)

Vérifier que $AN = \frac{5}{3} \left| x - 1 \right|$

c) En déduire que si AN est un multiple de 10 alors x et y sont des entiers

BONNE CHANCE