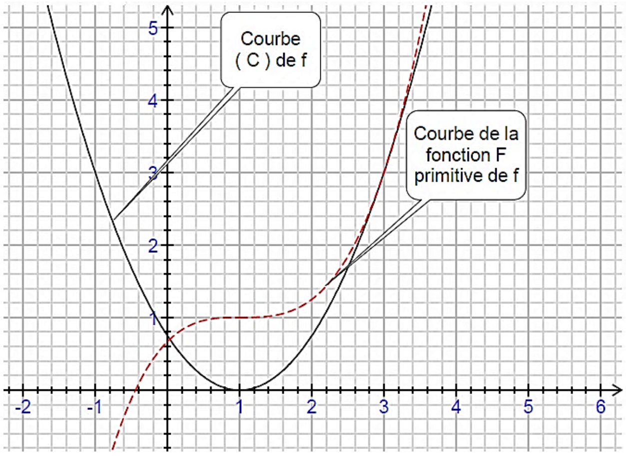
Lycée Jammel 3 Lycée Menzel Hayet 04/03/2014	Devoir de Synthèse n °2 Classe 4 M Durée : 4h	Afli Ahmed Lejmi Malika

EXERCICE N°1: (3 Points)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte. (Aucune justification n'est demandée)

1. L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites : $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$ est égale à :

[a] 1   [b] 2   [c] 3



2. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} \ln(1 + e^{-x}) =$

[a] 1   [b] e   [c] $+\infty$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x^2} - 1}{sin^2 x} =$

[a] 1   [b] 2   [c] 4

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 2\ cm$

Soit C = {M(x,y) tels que : $y = \frac{1}{\cos(x)}$ et $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$} et S le solide obtenu par la rotation de C autour de l'axe $(O;\vec{\imath})$. Le volume de S , en cm^3 , est égal à :

[a] $8\pi.cm^3$ [b] $4\pi.cm^3$ [c] $\pi.cm^3$

EXERCICE N°2: (4 Points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $1+2i$, $5-2i$ et -1

On considère l'application f définie par : $f: \quad P \longrightarrow P$

$$M(z) \longmapsto M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{1}{2} i \bar{z} - 1 + \frac{1}{2} i$$

1. / a. Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

   Vérifier que C est le centre de f

   b. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $2\overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{CM}$

   En déduire une équation de l'axe de f.

2. / Soit g la similitude indirecte qui transforme O en C et A en B

   a. Donner l'écriture complexe de g

   b. On pose $h = f \circ g$. Soit M un point un point quelconque du plan, d'affixe z et M' son image par h et on note z' l'affixe de M'

   Montrer que $z' = (1+i)z - 1$ puis caractériser h .

EXERCICE N°3: (4 Points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct R $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les ensembles des points M(x,y) suivants : $(h) : x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0$; $(P) : 4y^2 + 2x - 5 = 0.$

1. / a. Montrer que (h) est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets et les asymptotes .

   b. Montrer que (P)est une parabole dont on précisera le sommet ,le foyer et la directrice D.

   c. Construire (h) et (P) dans le même repère .

2. / Montrer que la droite (T) d'équation :$x + 2\sqrt{5}y - 5 = 0$ est une tangente commune à (h) et (P) au point $A(0, \frac{\sqrt{5}}{2})$.

3. / Pour tout $x \geq 0$, on pose : $F(x) = \int_1^{e^x - e^{-x} + 1} \sqrt{4 + (1-t)^2}\, dt$

   a. Montrer que F est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ on a :

   $F'(x) = (e^x + e^{-x})^2$.

   b. Calculer F(0) et déduire l'expression de F(x) pour tout $x \in [0 ; +\infty[$.

   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^x - e^{-x} + 1 = \frac{5}{2}$.

   d. On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (h) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \frac{5}{2}$. Montrer que $A = \frac{15}{8} + 2\ln 2$ (u.a)

WWW.DEVOIR@T.NET

EXERCICE N°4: (5 Points)

On définit, pour tout entier naturel n ≥1, l'intégrale : $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$

1. / Calculer I_1.
2. / Etablir que pour tout entier naturel n ≥1 on a : $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1)$
3. / A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n ≥1 on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. / Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.
5. / On pose, pour tout entier naturel n ≥1, $U_n = \frac{2^n}{n!}$
   a. Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et prouver que pour tout entier naturel n ≥ 3 on a : $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

   b. En déduire que pour tout entier naturel n ≥ 3 on a : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} . U_3$
6. / En déduire la limite de la suite (U_n) puis celle de la suite (I_n)
7. / Justifier enfin que : $e^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right)$

EXERCICE N°5: (5 Points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \frac{x\ln x}{x-1} & ; x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 0 & ; \quad f(1) = 1 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $((O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. / a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$

   b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2. / Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ et φ la fonction définie sur]0,+∞[par :

$$\varphi(t) = \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2}(t-1)^2 - t\ln(t) - 1 + t.$$

   a. Calculer $\varphi(x)$ *et* $\varphi(1)$.

   Montrer qu'il existe un réel c compris entre 1et x tel que $\varphi'(c) = 0$

   b. En déduire que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \frac{1}{2}$

   c. Donner l'équation da la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1

3. / a. Soit la fonction g définie sur]0,+∞[par $g(x) = 1 - x^2 + 2x\ln(x)$

   Dresser le tableau de variation de g' puis celui de g et en déduire le signe de g sur]0,+∞[

   b. Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

4. / Dresser le tableau de variation de f et tracer (C) .

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014
Prof : Afli Ahmed