Lycée Martyr Wallid Mechlaoui Mornag	**DEVOIR DE SYNTHESE N°2**	Le :04/03/2014
Prof :Oueslati.Mongi		$4^{\text{éme}}$Math Duré : 4 H

EXERCICE N°1 *(3 points)*

Répond par vrai ou faux en justifiant vos repense.

1) *Soit l'application f de P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que* $z'=2i\bar{z}-4$ *.Alors l'axe de f à pour équation x=y*
2) *Soit f une fonction continue sur IR tel que pour tout x>0 ; f(-x)=2f(x) ; il existe alors un réel c de [-2 ;0] tel que :* $\int_0^2 f(t)dt = f(c)$
3) *Soit f une fonction dérivable sur IR ; F sa primitive sur IR et on a* $I=\int_0^x tf'(t)dt$

   Alors F est une solution de l'équation différentielle (E) : x y'-y= I

EXERCICE N°2 *(4 points)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. *On considère les points M ; N et P d'affixe respectives* z ; $\dfrac{2+z-\bar{z}}{2}$ *et 1+iz*

et Δ la droite d'équation x=1

1) *Montrer que P est l'image de M par une rotation d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *que l'on précisera le centre*
2) *Montrer que N est le projeté orthogonale du point M sur Δ*
3) *Soit* $\mathscr{P}$ *l'ensemble des points M d'affixe z tel que O ; N et P soient alignés*
   a) *Montrer qu'une équation cartésienne de* $\mathscr{P}$ *est x-y(1-y)=0 .*
   b) *Montrer que* $\mathscr{P}$ *est une parabole dont on précisera le sommet ; le foyer et la directrice.*
   c) *N étant un point donné sur Δ ; donner une procédé de construction du point M de* $\mathscr{P}$

EXERCICE N°3 *(4 points)*

1) *Soit l'équation différentielle (E) : y''+y=0*

   Résoudre (E)
2) *Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables sur]0 ;+∞[tel que :* $f(x)=xg(\frac{1}{x})$ *Montrer que pour tout* $x\in]0;+\infty[$ *on a :*

   $f''(x)=\dfrac{1}{x^3}g''(\dfrac{1}{x})$
3) *Soit l'équation différentielle (E') :* $y''+\dfrac{1}{x^4}y=0$

a) Montrer que g est une solution de (E') si et seulement si f est une solution de (E)

b) On prend $g(x)=x\sin(\frac{1}{x})$. Montrer que g est une solution de (E')

c) Déduire la primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$ sur $]0;+\infty[$

d) Calculer alors $I=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\sin(\frac{1}{x})dx$

EXERCICE N°4 (5 points)

Soit f une fonction définie sur R par $f(x)=\frac{1}{1+e^{2x}}$; soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Etudier les variations de f

b) Montrer que le point $I(0;\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C)

c) Construire la courbe (C).

2) a) Montrer que qu'il existe deux réels a et b tel que $f(x)=a+\frac{be^{2x}}{1+e^{2x}}$

b) Soit $\alpha>0$; calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limité par la courbe (C) ; la droite d'équation $x=\alpha$; $x=0$ et $y=0$ puis calculer $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

3) On pose $I_n=\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} e^{2nt}dt$; pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Calculer I_0 et I_n pour $n\neq 0$ .Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $t\in[-1;\frac{-1}{2}]$ on a

$$1-e^{2t}+e^{4t}-.............(-1)^{n-1}e^{2(n-1)t}=\frac{1}{1+e^{2t}}-\frac{(-1)^n e^{2nt}}{1+e^{2t}}$$

c) En déduire que

$$I_0-I_1+I_2+..................+(-1)^{n-1}I_{n-1}=\int_{-1}^{\frac{-1}{2}}\frac{dt}{1+e^{2t}}+(-1)^{n+1}\int_{-1}^{\frac{-1}{2}}\frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}}dt$$

d) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $0\le\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} e^{2nt}f(t)dt\le I_n$; en déduire

que $\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} e^{2nt}f(t)dt=0$

4) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(I_0-I_1+I_2-..................+(-1)^{n-1}I_{n-1})=\frac{1}{2}\ln(\frac{e^2+1}{e+1})$

EXRCICE N°5 *(4 points)*

Dans le plan orienté ;soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

on désigne par I ,J ,K et L les milieux respectifs des segments [AB] , [BC], [AC] et [JC]

1) *Soit f la similitude directe de centre J tel que f(A)=K*
   a) *Déterminer l'angle et le rapport de f*
   b) *Justifier que f(K)=L*
   c) *soit H le milieu de [AJ] .Montrer que f(I)=H*
2) *On menue le plan du repère orthonormé direct* $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$. *Soit g du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe* $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right).\bar{z} + \frac{1+i}{2}$.
   a) *Montrer que g est une similitude indirecte de centre C*
   b) *Donner les affixes de I , J*
   c) *Déterminer g(I) et g(J)*
   d) *Soit Δ l'axe de g ; tracer Δ*