Lycée Martyr Wallid Méchlaoui Mornag	DEVOIR DE SYNTHESE N°2	Le :05/03/2013 $4^{éme}$Math
Prof :Oueslati.Mongi		Durée : 4 H

EXERCICE N°1 (4 points)

Choisir une seule réponse correcte en justifiant.

1)Soit f une fonction définie sur]-1 ;1[par :f(x)= $\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$ *.Alors*

a) f(1)=1 *b) f est paire* *c) f est strictement croissante sur]-1 ;1[*

2) Soit f une fonction définie sur]0 ;+∞[par :f(x)= $2x-2+\frac{\ln x}{x}$ *.Alors la fonction* $x \mapsto x^2 f'(x)$ *admet : a) un seul minimum sur]0 ;+∞[; b) un maximum sur]0 ;+∞[c)je ne sais pas*

3) On considère la suite $I_n=\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$. *Alors l'égalité* $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n}(e^n-1)$ *est :*

a) vrai *b) faux* *c) je ne sais pas*

4)Soit f une fonction définie par f(x)=x-ln(2-e^x*) ;*$u_{n+1}=f(u_n)$ *et* $v_n=\frac{e^{u_n}}{e^{u_n}-1}$

a)v_n *est une suite géométrique* *b)* v_n *est une suite arithmétique*

EXERCICE N°2 *(5 points)*

Soit ABCD un carré de centre O tél que : $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ *; Δ et Δ' deux droites perpendiculaires en A .* $\Delta\cap(DC)=\{M\}$ *;* $\Delta'\cap(BC)=\{M'\}$ *; I=M*M' et J=A*B*

1) *R une rotation de centre A tel que : R(D)=B*
   a) *Montrer que R((DC))=(BC)*
   b) *Montrer que R(M)=M'*
2) *Soit S une similitude directe de centre A et pour tout point M ≠ A on a S(M)=G avec G centre de gravité du triangle AMM'*

a) *Montrer que* $AG = \frac{2}{3}AI$

b) *En déduire que S de rapport* $\frac{\sqrt{2}}{3}$ *et de d'angle* $-\frac{\pi}{4}$

3) a) *Déterminer la similitude directe f tél que f(J)=B et f(O)=C*

c) *Caractériser g=foS puis la forme réduite de g*

4) *Soit h la similitude indirecte tél que : h(B)=J et h(D)=K avec* $S_A(D)=D'$ *et K=A*D'*

a) *Déterminer le rapport de h*

b) *On pose h(A)=A'*

Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{A'J}\,;\overrightarrow{A'K}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ *et A'J=A'K*

c) *En déduire que A'=A puis la forme réduite de h*

<u>EXERCICE N°3</u> *(6 points)*

Soit f_n *une fonction définie sur* $]o\,;+\infty[$ *par :* $f_n(x)=x-n\ln x$ *; pour tout* $n \in IN \setminus\{0\,;1\,;2\}$

1)*Étudier les variations de* f_3 *puis construire* C_{f_3} *sur la feuille à remettre avec la copie du devoir*

2) *Montrer que l'équation* $f_3(x)=0$ *admet exactement deux solutions* u_3 *et* v_3 *tel que :*

$u_3 \in]1\,;3[$ *et* $v_3 \in]3;+\infty[$

3)a) *Étudier les variations de* f_n

b) *Montrer que l'équation* $f_n(x)=0$ *admet une solution unique* u_n *dans* $]1\,;n[$

c) *Placer* $u_3\,;u_4\,;u_5$ *et* u_6 *sur l'axe des abscisses sur la figure*

d)*Placer* $f_3(u_4)$ *;* $f_4(u_5)$ *et* $f_5(u_6)$ *sur l'axe des ordonnées sur la figure*

4) a) *Montrer que pout entier naturel n>2 ;* $f_{n+1}(u_n)<0$

b) *En déduire que la suite* u_n *est décroissante et* u_n *est convergente vers un réel l*

c)*Montrer que* $\frac{\ln u_n}{u_n} = \frac{1}{n}$ *; en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE N°4 (5 points)

Soit f l'application du plan dans lui-même qui tout point M(x ;y) associe le point M'(X ;Y)

$$\begin{cases} X = x - y \\ Y = x + y \end{cases}$$

1) Montrer que f est une similitude directe de centre O de rapport $\sqrt{2}$ *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$

2) Soit (C) la courbe d'équation $3x^2+3y^2-10xy=1$ *et f(C)=(C')*

a) Montrer que (C') est une hyperbole d'équation :$4X^2-Y^2=1$

b) Construire (C')

c)En déduire la construction de (C).

3)Soit (E) l' ellipse d'équation : $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ *et le point A(0 ;4)*

a) Construire (E)

b) Soit f la fonction définie sur [-1 :1] par :$f(x)=2\sqrt{1-x^2}$ *et*

$F(x)=\int_0^{\sin x} f(t)dt$ *pour* $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$

Calculer F'(x) puis F(x) ;en déduire A_E *l'aire de la partie du plan limité Par (E).*

Figure à remettre avec la copie du devoir