Lycée Thélèpte
A.S : 2011-2012

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures

4 ème Maths
Prof : H.Salem

Exercice 1(3pts)

Donner la réponse correcte aucune justification n'est demandée.

1) Soit H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ d'excentricité e.

   a) $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $e = \sqrt{3}$ c) $e = \frac{3}{2}$

1) Les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $x^2 - x + 4 \equiv o[mod\ 6]$ sont de la forme :

   a) $2p, p \in \mathbb{Z}$; b) $6p+2$; $p \in \mathbb{Z}$; c) $6p+2$; $p \in \mathbb{Z}$ ou $6p+5$; $p \in \mathbb{Z}$

2) Soit g l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M(Z) on associe le point M'(Z') tel que $Z' = 2i\overline{Z} + 1 + i$. g est une :

   a) Similitude directe de rapport 2 et de centre $\Omega(1-i)$.

   b) Similitude indirecte de rapport 2 et de centre $\Omega(-1-i)$.

   c) Homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-1-i)$.

Exercice 2(5pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la parabole P d'équation $y^2 = 2x$ et on désigne par M et M' les points de coordonnées respectivement $\left(\frac{t^2}{2}, t\right)$ et $\left(\frac{1}{2t^2}, -\frac{1}{t}\right)$ où t est un réel non nul.

1) a) Déterminer les coordonnées du foyer F de P et l'équation de sa directrice D.
   b) Tracer P et placer le foyer F.
   c) Vérifier que les points M et M' appartiennent à P.

2) On désigne par T et T' les tangentes à P respectivement en M et M'.

   a) Montrer que les points M, F et M' sont alignés.

   b) Ecrire les équations des tangentes T et T'. En déduire que T $\perp$ T'.

   c) On pose H l'intersection de T et T'. Montrer que H varie sur une droite fixe quand t décrit IR*.

Exercice 3: (4 pts)

1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^{4} par 5.

c) En déduire que $6^{40} \equiv 1(mod 11)$ et que $6^{40} \equiv 1(mod 5)$

d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55

2) Dans cette question x et y désignent deux entiers relatifs.

a) Vérifier que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b) Vérifier que l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E'). En déduire le reste modulo 40 de 17.

Exercice 4: (8 pts)

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \ln x$.

a) Etudier les variations de g sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ et que $0,27 < \alpha < 0,28$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer T et (C) en précisant les branches infinies de (C).

II) Soit la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^{2x} f(t)dt$

1) Montrer que F est dérivable sur IR_+ et calculer $F'(x)$.

2) Soit $x \geq 0$

a) Montrer que pour tout réel t de $[1, x]$; $\frac{1}{2} \ln t \leq f(t) \leq t \ln t$.

b) Calculer les intégrales $I(x) = \int_1^{2x} \ln t \, dt$ et $J(x) = \int_1^{2x} t \ln t \, dt$

c) En déduire que $x\, ln(2x) - x + \frac{1}{2} \leq F(x) \leq 2x^2 \ln(2x) - x^2 + \frac{1}{4}$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right)$.

3) On donne $F(0) \approx 0{,}2$. Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Bon Travail