Ministère de l'éducation *************** Lycée Ibn Khaldoun Sidi Aich	**Mathématiques** **Devoir de synthèse n°2**		
Prof : M.Mahmoudi	Classe : 4ème Maths	Date : 25/02 /2022	Durée : 4h

Exercice 1

On pose pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\, dx$.

I)1) Calculer I_1 .

2) On se propose de calculer I_0.

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\, dt$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

c) En déduire que $I_0 = \frac{\pi}{4}$

3)a) Etudier les variations de la suite (I_n).

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

4)a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \le I_n \le \int_0^1 x^n\, dx$.

b) En déduire la limite de la suite (I_n).

II) On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de (I_n) en fonction de n.

1)a) Soit v la fonction définie sur [0,1] par $v(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

Donner une primitive de v sur [0,1].

b) Par une intégration par partie , montrer que pour tout entier $n \ge 2$ on a : $(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$.

2) Montrer, par récurrence , que pour tout entier naturel non nul p on a :

$$I_{2p} = \frac{1\times 3\times \ldots \times (2p-1)}{4\times 6\times \ldots \times (2p+2)} \times \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2\times 4\times \ldots \times (2p)}{3\times 5\times \ldots \times (2p+3)} .$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$.

On désigne par C_f la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1)a) Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que f n'est pas dérivable a droite en 0.

c) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.

2) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

On désigne par g sa fonction réciproque.

3) Sur la graphique dans la page annexe on a représenté dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe C_g de la fonction g

ainsi que la courbe Γ d'équation $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Justifier, à l'aide du graphe , que l'équation $f(x)=g(x)$ admet deux solutions 0 et α.

b) Construire la courbe C_f dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4) On note A le point de coordonnées $(\alpha,0)$.

a) Justifier que que $\int_0^\alpha f(x)dx=\alpha^2-\int_0^\alpha g(x)dx$.

b) En déduire que $\bar{f}+\bar{g}=\alpha$ où $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont les valeurs moyennes de f et g sur $[0,\alpha]$.

5)a) Montrer que pour tout $u\geq 0$ on a $1-u\leq\dfrac{1}{1+u}\leq 1-u+u^2$.

b) En déduire que pour tout $t>0$ on a $t-\dfrac{t^2}{2}\leq\ln(1+t)\leq t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}$.

c) Montrer alors que $x>0$ on a $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x\sqrt{x}}{3}\leq\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})\leq\dfrac{x}{2}$.

6)a) Montrer que la fonction $F:x\mapsto(x-1)\ln(1+\sqrt{x})-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{x}$ est une primitive de f sur $[0,+\infty[$

b) En déduire que $\bar{f}=\alpha+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}-\dfrac{3}{2}$

7) Placer sur la figure les points B et C pour que le rectangle OABC ait la même aire que la partie du plan limitée par C_g et les droites d'équations x=0 ; $x=\alpha$ et y=0

Exercice 3

ABC est un triangle équilatéral direct de centre O. Soit A' et C' les milieux respectifs de [BC] et [AB].

On désigne par I le symétrique de O par rapport à C'.

1) Montrer que le triangle OAI est équilatéral direct.

2) Soit f la similitude directe qui telles que f(I)=O et f(C)=B.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que le centre Ω de f est un point commun aux cercles circonscrits au triangle OAI et OBC. Construire Ω.

c) Montrer que f((AI))=(OA) et déterminer f((AC)). En déduire de f(A)=A'.

3) Soit R la rotation de centre O telle que R(A)=C et h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.

Montrer que $f = h \circ R$.

4) Soit g la similitude indirecte telles que g(I)=O et g(C)=B. On note J le centre de g.

a) Déterminer le rapport de g.

b) Déterminer $g \circ f^{-1}(O)$ et $g \circ f^{-1}(B)$. Caractériser $g \circ f^{-1}$.

c) Montrer que g(B)=A' et que J est le barycentre de (C, 1) et (A',-4).

d) Montrer que l'axe Δ de g est la perpendiculaire à (BC) en J.

Exercice 4

I)1) Déterminer suivant n le reste de 7^n modulo 32.

2) En déduire le reste modulo 32 de $N = 2023^{2013} + 2023^{2014} + 2023^{2015}$.

II) Dans cette partie on se propose de déterminer les couples (n,m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) : $7^n - 3 \times 2^m = 1$.

1)a) Pour $m = 1$, déterminer l'entier naturel non nul n tel que tel que $7^n - 3 \times 2^m = 1$.

b) Montrer que , pour $m \leq 4$, il existe exactement deux couples (n,m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F).

2) On suppose qu'il existe un couple (n,m) d'entiers naturels tel que $m \geq 5$ et vérifiant la relation (F).

a) Montrer que $7^n \equiv 1\ [32]$.

b) En déduire que n est divisible par 4.

c) Montrer alors que $7^n \equiv 1\ [5]$

3) Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n,m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?

4) Conclure , c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).