| | | |
|---|---|---|
| *Lycée Tahar Sfar Mahdia* | **Devoir de synthèse n° 3**<br>*Mathématiques* | *Niveau : 4 ème Math* |
| *Date : 11 / 05 / 2017* | *Profs : SAIDI . A & MEDDEB . T* | *Durée : 4 heures* |

***NB** : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

## Exercice n°1 : (4 pts)

Le tableau ci-dessous indique le nombre annuel exprimé en milliers de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation par une entreprise.

| Année | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année : $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : $y_i$ | 81,3 | 92,3 | 109,7 | 128,5 | 131,2 |

Les résultats seront donnés arrondis à $10^{-3}$ prés.

**A/** 1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;y_i)$ dans un repère orthogonal.

2) $a/$ Calculer le coefficient de corrélation $r$ de cette série, un ajustement affine est il fiable? Si oui déterminer l'équation de la droite de régression de $y$ en $x$.

$b/$ Donner une estimation du nombre de véhicules vendus en 2016.

3) Le tableau ci-dessous indique le nombre annuel exprimé en milliers de véhicules vendus de l'année 2012 jusqu'à l'année 2016.

| Année | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année : $x_i$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : $y_i$ | 131,2 | 110,8 | 101,4 | 86,3 | 76,1 |

$a/$ Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs.

$b/$ L'ajustement précédent est il encore adapté ? Justifier la réponse .

4) Les experts décident d'ajuster le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;y_i)$ pour $i$ entier variant de 4 à 8 par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points pour cela on pose $z = \ln y$ .

$a/$ Déterminer une équation de la droite de régression de $z$ en $x$, en déduire l'expression de $y$ en fonction de $x$.

$b/$ L'entreprise décide d'arrêter la fabrication de ce modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65000. En quelle année l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt ?


www.devoirat.net 2017
Saidi A & Meddeb T

**B/** Un véhicule vendu par cette entreprise est garanti un an et sa durée de vie exprimée en années Jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

1) Déterminer la valeur de $\lambda$ a $10^{-2}$ prés sachant que la probabilité que le véhicule ne tombe pas en panne pendant la période de sa garantie est égale à $0,9$.
2) Le véhicule n'est pas tombé en panne pendant la période de garantie, Déterminer la probabilité qu'il ne connaisse pas de pannes au cours des $3$ années suivantes.

## Exercice n°2 : *( 4 pts )*

La gendarmerie nationale essaie un nouvel alcootest. Une caractéristique de cet alcootest est que : $96\%$ des individus ivres sont déclarés positifs par ce test.

Une étude statistique montre que :

- Parmi les automobilistes contrôlés, il ya $2\%$ de personnes ivres.
- Le test est positif dans $2,9\%$ des cas.

On note $T$ l'événement : « le test de la personne contrôlée est positif ».

On note $I$ l'événement : « la personne testée est ivre ».

1) En utilisant les événements $T$ et $I$, traduire en langage de probabilités les pourcentages ci-dessus.
2) Un gendarme contrôle un automobiliste au hasard. Calculer la probabilité que cet automobiliste soit :

   $a/$ Ivre et contrôlé positif.

   $b/$ Sobre et contrôlé positif.
3) Calculer la probabilité que cet automobiliste soit ivre sachant qu'il est contrôlé positif.
4) Un contrôle coûte à l'état $4$ dinars. Si le test est positif, cela donne lieu à un procès-verbal, puis au paiement d'une amende de $200$ dinars. Bien entendu, un test négatif donne lieu à un acquittement. Calculer l'espérance de gain par contrôle pour l'état dans les conditions de ce test.
5) On interroge indépendamment $50$ automobilistes qui ont assisté à ce contrôle.

   $a/$ Calculer la probabilité qu'au moins un d'eux soit contrôlé positif.

   $b/$ Déterminer le nombre moyen d'automobilistes contrôlés positifs.

Saidi A & Meddeb T

## Exercice n°3 : ( 8 pts )

A – Soit $f$ la fonction définie sur $]-\ln 2\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2e^x-1}}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Montrer que pour tout $x\in]-\ln 2\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-e^x}{(2e^x-1)\sqrt{2e^x-1}}$.

$b/$ Etablir le tableau de variations de $f$. Préciser $f(0)$.

$c/$ Construire $\mathscr{C}_f$.

2) Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,\pi[$ par : $g(x)=-\ln(1+\cos x)$.

$a/$ Montrer que $g$ est une bijection de $[0\,;\,\pi[$ sur $[-\ln 2\,;+\infty[$.

$b/$ On note $\varphi=g^{-1}$. Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $]-\ln 2\,;+\infty[$ et que $\varphi'(x)=f(x)$.

B – Pour tout $n\in IN^*$, soit $F_n$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $F_n(x)=\int_0^x[f(t)]^n dt$.

1) $a/$ Montrer que $F_1(x)=\varphi(x)-\dfrac{\pi}{2}$.

$b/$ On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la région du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\ln 2$. Montrer que : $\mathscr{A}=\dfrac{\pi}{6}$.

$c/$ Vérifier que, pour tout réel $t\geq 0$, on a : $\dfrac{1}{2e^t-1}=\dfrac{e^{-t}}{2-e^{-t}}$ , puis expliciter $F_2(x)$.

2) On admet que $F_n$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$, et on note $L_n=\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)$.

$a/$ Calculer $L_1$ et $L_2$.

$b/$ En remarquant que, pour tout réel $t\geq 0$, on a : $0\leq f(t)\leq 1$, montrer que $F_{n+1}(x)\leq F_n(x)$.

$c/$ En déduire que la suite $(L_n)$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

3) $a/$ Montrer que, pour tout réel $t\geq 0$, $f(t)+[f(t)]^3=-2f'(t)$.

$b/$ En déduire que, pour tout $n\in IN^*$, $F_n(x)+F_{n+2}(x)=\dfrac{2}{n}\left[1-(f(x))^n\right]$.

$c/$ Montrer alors que, pour tout $n\in IN^*$, $L_n+L_{n+2}=\dfrac{2}{n}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n$.

4) On pose, pour tout $n\in IN^*$, $U_n=(-1)^n L_{2n}$ et $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

$a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN^*$, $U_{n+1}=U_n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$b/$ En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\ln 2$.



www.devoirat.net 2017

Saidi A & Medeb T

## Exercice n°4 : *( 4 pts )*

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 9x+5y=1$.

   $a/$ Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de $(E)$, alors $x^2 \equiv 1 \pmod 5$.

   $b/$ Donner une solution particulière de $(E)$, puis résoudre l'équation $(E)$.

   $c/$ En déduire les solutions du système $(S) : \begin{cases} 9x+5y=1 \\ x \equiv y \pmod 3 \end{cases}$.

2) Soit $N$ un entier tel qu'il existe un couple d'entiers $(a\ ;\ b)$ vérifiant : $\begin{cases} N = 9a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$.

   $a/$ Montrer que le couple $(a\ ;-b)$ est solution de $(E)$.

   $b/$ Pour tout entier $m$, montrer l'équivalence:

   $\begin{cases} m \equiv 1 \pmod 9 \\ m \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$ si, et seulement si $m \equiv 37 \pmod{45}$.

   $c/$ Trouver alors le reste de la division euclidienne de $N$ par 45.

3) Pour rembourser les frais mensuels de transport à ses employés ( cadres et ouvriers ), une entreprise a dépensé une somme de 1000 dinars.

   Sachant que les cadres ont reçus 90 dinars chacun et les ouvriers 50 dinars chacun.

   Combien pouvait-il y avoir de cadres et d'ouvriers dans cette entreprise ?

Saidi A & Meddeb T

*Bon courage*



www.devoirat.net 2017