Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Devoir à la maison n°2** Bézout + ln + Espace	$4^{ème}$ Math **Tunis ,Tél :27509639**

Exercice n°1 :

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte. Indiquer sur votre copie, le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

1) $\int_{\ln 4}^{\ln 2} \frac{1}{t}\, dt$ est égale à :
   a) $\ln 2$ b) $-\ln 2$ c) 1.
2) Soit f la fonction définie sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\tan x}$. Une primitive F de la fonction f sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ est :
   a) $F(x) = \sin(\ln x)$ b) $F(x) = \ln(\sin x)$ c) $F(x) = \ln(\cos x)$.
3) $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x \ln x} dx$ est égale à :
   a) $\ln 2$ b) $-\ln 2$ c) $\frac{3}{8}$.
4) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.Soit A(-1,2,3) et B(1,4 ,0) ,le plan médiateur de [AB] a pour équation :
   a) 2x+2y-3z+14=0 b) $2x+2y-3z-\frac{3}{2} = 0$ c) x+y-3z+11=0.
5) L'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples :
   a) (4+10k ; 9+24k) b) (9+5k ; 21+12k) c) (4+5k ; 5+4k) ou $(k \in \mathbb{Z})$.

Exercice n°2 :

On considère, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $148x - 97y = 1$.

1) a) En utilisant l'algorithme d'Euclide ,montrer que le couple (-19,-29) est une solution particulière de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,l'équation (E).
   c) Déterminer un inverse modulo 148 de 97.
2) a) Vérifier que 149 est un nombre premier.
   b) Soit p un entier naturel non nul tel que $p \leq 148$. Montrer que $p^{148} \equiv 1[149]$.
3) Soit $a \in \{2,3,4, \dots \dots \dots .. ,148\}$, on pose $S(a) = 1 + a + a^2 \dots \dots . + a^{147}$.
   a) Montrer que $a^{148} - (a-1)S(a) = 1$.
   b) En déduire que a^{148} et (a-1) sont premiers entre eux.
   c) Montrer que 149 divise S(a).
4) Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{37} \\ n \equiv 6 \pmod{4} \\ n \equiv 7 \pmod{97} \end{cases}$
   a) Montrer que (S) est équivalent à (S') : $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{148} \\ n \equiv 7 \pmod{97} \end{cases}$
   b) Résoudre alors (S) en utilisant les résultats du 1).

Exercice n°3 :

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.Soit I=B*F et J tel que $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points I et J et du vecteur $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}$.

b) Montrer que l'aire du triangle AIJ est $\frac{\sqrt{14}}{3}$.

2) Montrer que le volume du tétraèdre AIJE est $\frac{1}{9}$ puis déduire la distance du point E au plan AIJ.

3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est $x + 3y - 2z = 0$ .Calculer la distance de E au plan AIJ.

4) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$.

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que S et (AIJ) sont sécants suivants un cercle que l'on précisera.

Exercice n°4 :

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $\mathrm{f(x)} = \ln(2\mathrm{x} + 1) - \ln \mathrm{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Dresser le tableau de variation de f , en déduire que pour tout x>0 ,f(x)>0.

b) Montrer que pour tout x>1 ,$\ln 2 \leq f(x) \leq \ln 3$.

2) a) Montrer que l'équation f(x) =x admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α tel que $1 < \alpha < 1{,}1$.

b) En déduire la position relative entre la courbe (C) et la droite D : y=x.

3) a) Montrer que f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur I à préciser .Calculer $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})$ pour x de I.

b) Tracer (C) et (C') la courbe de f^{-1}.

4) Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\begin{cases} \mathrm{F(x)} = \left(\frac{2\mathrm{x}+1}{2}\right)\ln(2\mathrm{x}+1) - \mathrm{x}\ln \mathrm{x} & \text{si } \mathrm{x} > 0 \\ \mathrm{F}(0) = 0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0.

b) Dresser le tableau de variation de F.

5) Soit la suite $(\mathrm{I_n})$ définie sur IN par $\mathrm{I_0} = 1$ et pour tout n de IN $\mathrm{I_{n+1}} = \mathrm{I_n} + \ln\left(2 + \frac{1}{\mathrm{I_n}}\right)$.

a) Montrer que pour tout n de IN , $\mathrm{I_n} \geq 1$.

b) Montrer que $(\mathrm{I_n})$ est croissante.

c) Montrer en utilisant 1) b) , que pour tout n de IN , $1 + \mathrm{n}\ln 2 \leq \mathrm{I_n} \leq 1 + \mathrm{n}\ln 3$.

d) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I_n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{I_n}}$.

Exercice n°5 :

On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que : $\begin{cases} \mathrm{N} \equiv 5(\mathrm{mod}13) \\ \mathrm{N} \equiv 1(\mathrm{mod}17) \end{cases}$

a) Vérifier que 239 est solution de ce système.

b) Soit N un entier relative solution de ce système.

Démontrer que N peut s'écrire sous la forme N = 1+17x = 5+13y où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

c) Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

d) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18+221k$.

e) Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \pmod{221}$ et $\begin{cases} \mathrm{N} \equiv 5(\mathrm{mod}13) \\ \mathrm{N} \equiv 1(\mathrm{mod}17) \end{cases}$

2) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

a) Existe-t-il un entier naturel k tel que $10k \equiv 1\ (17)$?

b) Existe-t-il un entier naturel k' tel que $10k' \equiv 18\ (221)$?