

CORRIGÉ DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

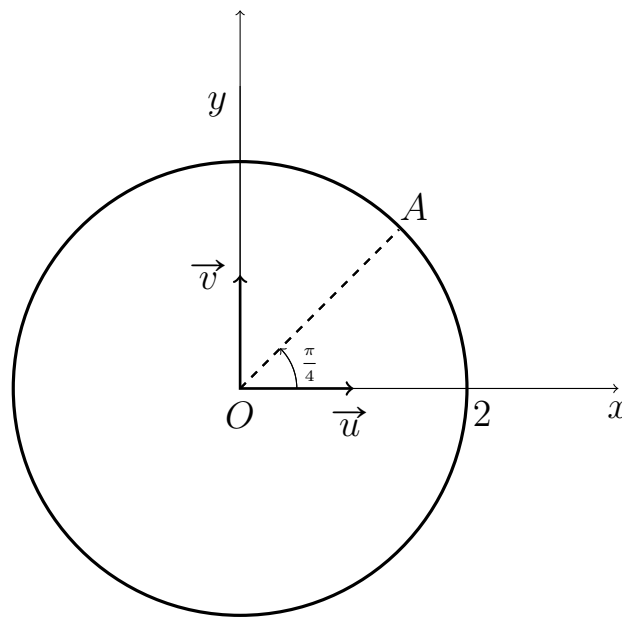
MATHÉMATIQUES

Exercice 1 (5 points)

1. a) $|z_A| = |z_B| = 2$, $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4}$ et $\arg(z_B) = \frac{5\pi}{6}$

b) On a : $OA = OB = 2 \implies A, B \in \mathcal{C}(O,2)$

c)



2. $\frac{z_B}{z_A} = \frac{i - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i} = \frac{\sqrt{2}i + \sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{6}i}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4}$

3. a) $z_A = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left[2; \frac{\pi}{4} \right]$

$$z_B = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \left[2; \frac{5\pi}{6} \right]$$

b) $\frac{z_B}{z_A} = \frac{\left[2; \frac{5\pi}{6} \right]}{\left[2; \frac{\pi}{4} \right]} = \left[1; \frac{7\pi}{12} \right]$

$$c) \text{ D'une part : } \frac{z_B}{z_A} = \frac{\left[2; \frac{5\pi}{6} \right]}{\left[2; \frac{\pi}{4} \right]} = \left[1; \frac{7\pi}{12} \right] = \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}$$

$$\text{D'autre part : } \frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4}$$

$$\text{Par identification, on en déduit que : } \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Exercice 2 (3 points)

$$11 \text{ jetons } \begin{cases} 3 N \\ 6 R \\ 2 V \end{cases}$$

- Le nombre de tirages possibles est le nombre d'arrangements de 3 jetons parmi 11 jetons, donc le nombre de tirages possibles est : $A_{11}^3 = 990$.
- Le nombre de tirages contenant 3 jetons rouges est : $A_6^3 = 120$.
- Le nombre de tirages contenant 3 jetons qui sont de la même couleur est : $A_3^3 + A_6^3 = 126$.
- Le nombre de tirages contenant un tirage tricolore est : $6 \times A_3^1 \times A_6^1 \times A_2^1 = 6 \times 36 = 216$.
- Le nombre de tirages contenant au moins un jeton rouge est : $3 \times A_6^1 \times A_5^2 + 3 \times A_6^2 \times A_5^1 + A_6^3 = 930$.
Autrement : aucun jeton rouge $A_{11}^3 - A_5^3 = 990 - 60 = 930$.

Exercice 3 (6 points)

- En utilisant les chiffres 9, 6, 3 et 8, on peut former : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ nombres ayant 4 chiffres distincts.
- Un tiercé, c'est 3 personnes.
Pour la première personne, il y a 20 choix.
Pour la deuxième personne, il y a 19 choix.
Pour la troisième personne, il y a 18 choix.
Le nombre de tiercés est donc : $A_{20}^3 = 6840$.
- a) $A_{26}^3 = 15600$.
b) $26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17576$.
- Il y a : $2^{10} = 1024$ façons différentes de répondre à cet examen.
- Le nombre de résultats possibles est : $2^3 \times 6^2 = 8 \times 36 = 288$.

6. On a : 6 voyelles et 20 consonnes. On peut former : $20 \times 6 = 120$ mots.
7. On note \mathcal{A} l'ensemble des nombres entiers positifs composés de 3 chiffres.
- $$\#\mathcal{A} = 9 \times 10 \times 10 = 900.$$

Exercice 4 (3 points)

1. $|z_B| = |z_C| = 4$, On a : $OB = OC = 4 \implies B, C \in \mathcal{C}_{(O,4)}$
2. a) On a : $z_A = \frac{z_B - z_C}{2} = 2i\sqrt{3}$.
- $$|z_A - z_B| = 2 \implies AB = 2.$$
- $$|z_A - z_C| = \sqrt{52} \implies AC = \sqrt{52}.$$
- $$|z_B - z_C| = 4\sqrt{3} \implies BC = 4\sqrt{3}.$$
- b) On a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ car : $52 = 4 + 48$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B .

Exercice 5 (3 points)

1. $U_1 = 1, U_2 = \sqrt{2}$ et $U_3 = \sqrt{3}$.
- On a : $\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{2}$ et $\frac{U_3}{U_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$
- On a : $\sqrt{2} \neq \sqrt{\frac{3}{2}} \implies (U_n)$ n'est pas une suite géométrique.
2. a) Montrons cette propriété par récurrence.
- Pour $n = 1$, on a : $U_1 = 1 \neq 0$, supposons que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \neq 0$ et montrons que : $U_{n+1} \neq 0$.
- On a : $U_n \neq 0 \implies U_n^2 \neq 0 \implies U_n^2 > 0 \implies U_{n+1} > 1 \implies U_{n+1} \neq 0$.
- Donc, par récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \neq 0$.
- b) Pour tout $n \geq 1$, on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{\frac{1 + U_n^2}{U_n^2}} = \sqrt{\frac{1}{U_n^2} + 1}$
- c) Pour tout $n \geq 1$, on a : $1 + \frac{1}{U_n^2} > 1$ car $U_n^2 > 0$.
- Donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{\frac{1}{U_n^2} + 1} > 1$, or les termes de la suite (U_n) sont strictement positifs $\implies (U_n)$ est strictement croissante sur \mathbb{N}^* .