

Exercice 1 : (4pts)

Répondre par « vrai » ou « faux » dans chaque affirmation proposée.

1) La fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ x^2-1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$ est dérivable en 0.

2) La fonction $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ a pour fonction dérivée $f'(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$ pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$

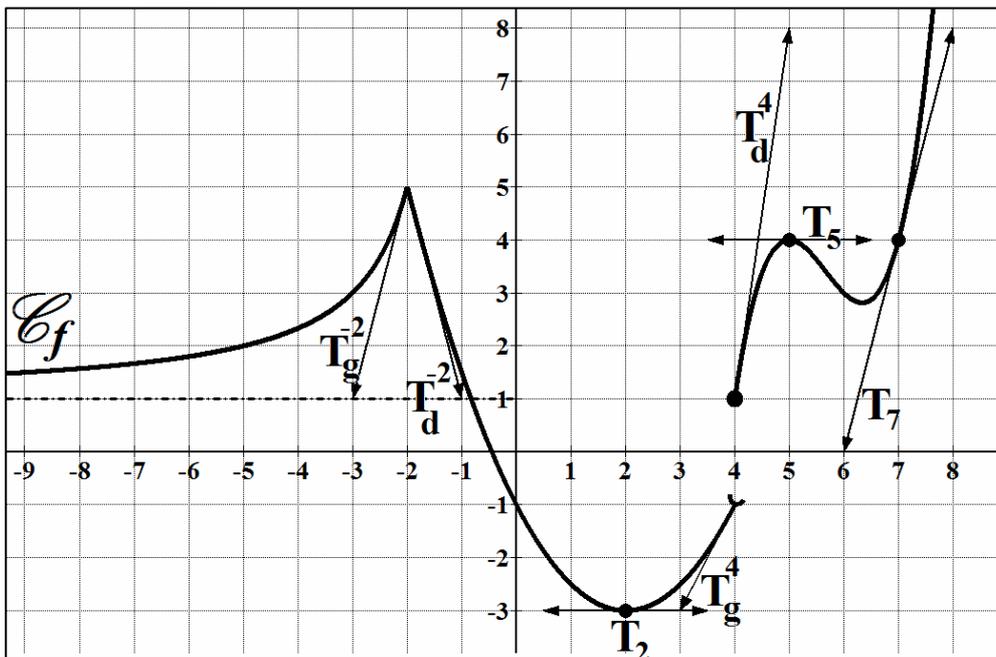
3) $\sin\left(\frac{21\pi}{2} - 3x\right) = \cos(3x)$

4) Soit A et B deux points distincts du plan orienté P, l'ensemble E définie par :

$$E : \left\{ M \in P, (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$
 est un cercle de centre A.

Exercice 2 : (4pts)

On a représenté ci-contre : \mathcal{C}_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} :



Par lecture graphique : Déterminer :

- 1) $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$ et $f(4)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f(x)-5}{x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+3}{x-2}$
- 4) $f'_g(4)$; $f'_d(4)$; et $f'(5)$
- 5) a/ l'ensemble de définition de la fonction f .
 b/ l'ensemble de continuité de la fonction f .
 c/ l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .

Exercice 3 : (5pts)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ -\frac{\sqrt{x}}{x} + 2 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$

1) a/ Montrer que f est continue en 1.

b/ En déduire domaine de continuité de f .

2) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3) a/ Soit a et $b \in]-\infty, 1]$. Montrer que $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = a + b - 2$ et déduire le sens de variation de f .

b/ Montrer que f est croissante sur $]1, +\infty[$.

4) Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en 1. f est-elle dérivable en 1 ?

5) a/ exprimer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$ et calculer $f'(-3)$.

b/ En déduire une expression de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -3.

6) Soit la droite $\Delta : y = -5x + 1$. Existe-t-il $x \in]-\infty, 1[$ tel que la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_0 est parallèle à Δ . Si oui donner la valeur de x_0 .

Exercice 4 : (7pts)

I- 1) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes a/ $\cos(2x) = 0$

b/ $\cos\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c/ $\cos\left(5x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right)$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $(\sqrt{2} \sin x - 1)(2 \cos x + 1) \geq 0$

II- 1) Montrer que : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x)$

2) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

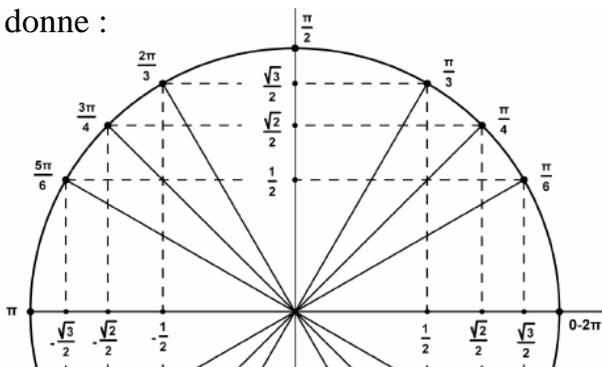
3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos(3x)}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$

a/ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

b/ Calculer $f(0)$.

c/ Résoudre dans \mathbb{R} : $f(x) = 1$

On donne :



bon travail

Correction du devoir de synthèse n°1

Exercice 1 :

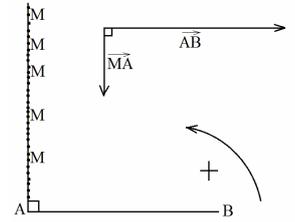
1) **faux** : La fonction f n'est pas continue en 0 alors n'est dérivable en 0.

2) **vrai** : Si $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ alors :

$$f'(x) = \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}} \text{ pour tout } x \in \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

3) **vrai** : $\sin\left(\frac{21\pi}{2} - 3x\right) = \sin\left(\frac{20\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(3x)$

4) **faux** : $E : \left\{ M \in P, (\widehat{MA, AB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ est la demi-droite définie par :



Exercice 2 :

1) $f(-2) = 5$

$f(0) = -1$

$f(2) = -3$

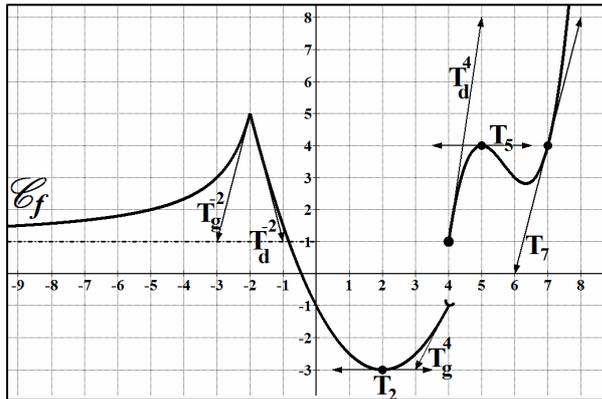
$f(4) = 1$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 5$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 1$



3) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f(x) - 5}{x + 2} = 4$

et

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 3}{x - 2} = 0$

4) $f_g'(4) = 2$

;

$f_d'(4) = 7$

et

$f'(5) = 0$

5) a/ $D_f = \mathbb{R}$

b/ $DC_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

c/ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$

Exercice 3 :

1) a/ On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ alors f est continue en 1.

b/ $DC_f = \mathbb{R}$

2) * $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$ et

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ -\frac{\sqrt{x}}{x} + 2 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\sqrt{x}}{x} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} \right) + 2 = 0 + 2 = 2$

3) a/ On a : $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{(a^2 - 2a + 2) - (b^2 - 2b + 2)}{a - b} = \frac{(a^2 - b^2) - 2(a - b)}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b) - 2(a - b)}{a - b} = a + b - 2$

et puisque a et $b \in]-\infty, 1]$ alors $a + b \leq 2 \Leftrightarrow a + b - 2 \leq 0$ d'où f est décroissante.

b/ On a :

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{a}}{a} + 2 \right) - \left(-\frac{\sqrt{b}}{b} + 2 \right)}{a - b} = \frac{\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{a - b} = \frac{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}}{a - b} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(a - b)\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{ab}} = \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{ab}} \geq 0$$

d'où f est croissante sur $]1, +\infty[$.

4) $f_g'(1) = \lim_{x \rightarrow (1)^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow (1)^-} \frac{(x^2 - 2x + 2) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow (1)^-} \frac{(x^2 - 2x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow (1)^-} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow (1)^-} (x - 1) = 0$

$$f_d'(1) = \lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{\left(\frac{-\sqrt{x}}{x} + 2\right) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{-\sqrt{x} + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{x(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2} \quad \text{par suite } f_g'(1) \neq f_d'(1) \Leftrightarrow f \text{ n'est pas dérivable en } 1$$

5) a/ $f'(x) = 2x - 2$ et $f'(-3) = 2 \times (-3) - 2 = -8$.

b/ $T_{-3}: y = f'(-3)(x + 3) + f(-3) = -8(x + 3) + 17 = -8x - 7$

6) On a $\Delta: y = -5x + 1$ pour que la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_0 est parallèle à Δ il faut que

$$f'(x_0) = -5 \text{ or } f'(x_0) = 2x_0 - 2 = -5 \Leftrightarrow 2x_0 = -3 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{3}{2} \text{ et } -\frac{3}{2} \in]-\infty, 1[$$

Exercice 4 :

I-1) $\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$* \cos\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ 3x + \frac{4\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ 3x = -\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 3x = -\frac{13\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \\ x = -\frac{13\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases} \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi; -\frac{13\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$* \cos\left(5x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{2\pi}{5}\right)\right) = \cos\left(-2x + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(-2x + \frac{9\pi}{10}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{5} = -2x + \frac{9\pi}{10} + 2k\pi \\ 5x - \frac{\pi}{5} = 2x - \frac{9\pi}{10} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{5} + \frac{9\pi}{10} + 2k\pi \\ 3x = \frac{\pi}{5} - \frac{9\pi}{10} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = \frac{11\pi}{10} + 2k\pi \\ 3x = -\frac{7\pi}{10} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{70} + \frac{2}{7}k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{30} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases} \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{11\pi}{70} + \frac{2}{7}k\pi; -\frac{7\pi}{30} + \frac{2}{3}k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) $(\sqrt{2} \sin x - 1)(2 \cos x + 1) \geq 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$(\sqrt{2} \sin x - 1)$	-	0	+	+	0	-
$(2 \cos x + 1)$	+	+	0	-	-	0
$(\sqrt{2} \sin x - 1)(2 \cos x + 1)$	-	0	+	0	-	0

II-

1) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{3} + \cos 2x \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cos(2x) \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cos(2x) \frac{1}{2} = \cos(2x)$

2) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } -1 \\ -\pi < -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$

$$S_{[-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

3) a/ On a $f(x) = \frac{\cos 3x}{\cos 2x} \Rightarrow \cos 2x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$

b/ $f(x) = \frac{\cos 3x}{\cos 2x} \Rightarrow f(0) = \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$

c/ $f(x) = \frac{\cos 3x}{\cos 2x} = 1 \Leftrightarrow \cos 3x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x + 2k\pi \\ 3x = -2x + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 5x = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2}{5}k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ 2k\pi; \frac{2}{5}k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$