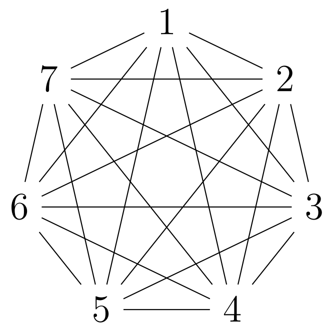
Prof : Mr Hamdi Zantour

Correction du devoir de synthèse N°2

Mathématiques

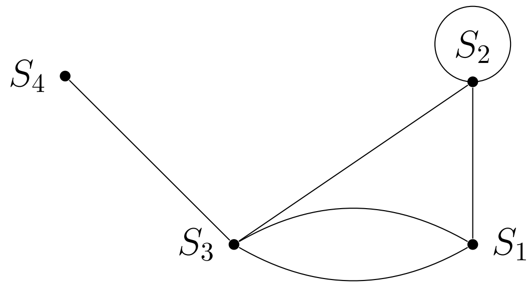
Exercice 1 (4 points)

1. On donne le graphe $\mathscr{K}$ ci-dessous.



$\mathscr{K} = K_7$ c'est un graphe complet d'ordre 7, la formule donnant le cardinal de ses arêtes est : $C_7^2 = \dfrac{A_7^2}{2!} = 21$

2. On donne le graphe $\mathscr{B}$ ci-dessous.



a/ Remplissage du tableau

Sommet	S_1	S_2	S_3	S_4
Degré	3	4	4	1

Coloriage du graphe $\mathscr{B}$:

Sommet	S_2	S_3	S_1	S_4
Degré	4	4	3	1

3 couleurs suffisent pour colorier ce graphe, par exemple : S_2 et S_4 en rouge, S_3 en noir et S_1 en vert.

b/ Ce graphe est connexe car il existe toujours une chaine reliant deux sommets distincts.

Ce graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets S_2 et S_4 ne sont pas adjacents.

c/ Ce graphe n'est pas eulérien car il n'admet pas un cycle eulérien puisque S_1 et S_4 sont de degré impair.

Exercice 2 (5 points)

On a : $f(x) = 1 + x - \sqrt{x^2 - 2\,x + 9}$

1. a/ On a : $f(0) = -\,2$

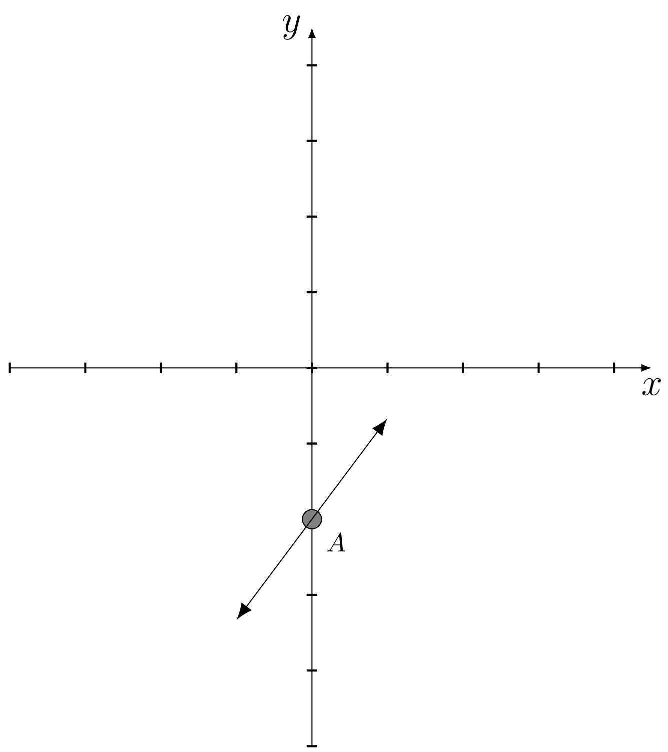
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \sqrt{x^2 - 2\,x + 9} + 3}{x} \tag{1}\\
&= \lim_{x\to 0} 1 + \frac{3 - \sqrt{x^2 - 2\,x + 9}}{x} \tag{2}\\
&= \lim_{x\to 0} 1 + \frac{x\,(2 - x)}{x\,(3 + \sqrt{x^2 - 2\,x + 9})} \tag{3}\\
&= 1 + \frac{2 - x}{3 + \sqrt{x^2 - 2\,x + 9}} \tag{4}\\
&= 1 + \frac{2}{6} \tag{5}\\
&= \frac{4}{3} \in \mathbb{R} \tag{6}
\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{4}{3}$

b/ L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f en 0 est :

$\Delta : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \dfrac{4}{3}\,x - 2$

c/ Construction de la tangente :



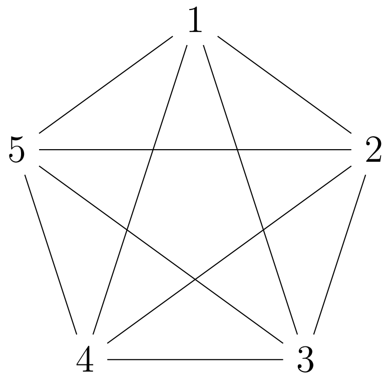
2. a/ Pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = 1 + \dfrac{2 - \frac{9}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}}}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

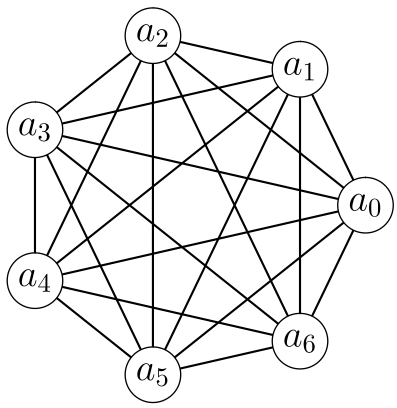
   b/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ Au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation : $y = 2$.

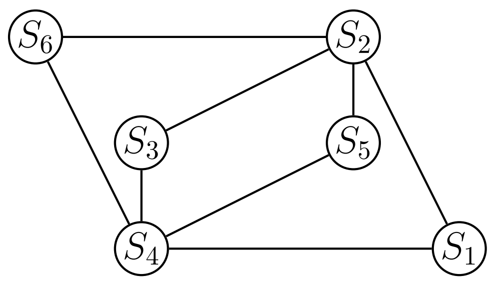
Exercice 3 (5 points)

1. On construit un graphe, ou du moins on imagine un graphe correspondant au problème posé : les sommets sont les appareils et les arêtes sont les fils, les sommets ont tous un degré impair et il y en a un nombre impair donc la somme de tous les degrés est impaire ce qui est absurde.
2. On remarque que l'on a : $G_1 = K_5 \Rightarrow \gamma(G_1) = \gamma(K_5) = 5$,
   $G_2 = K_7 \Rightarrow \gamma(G_2) = \gamma(K_7) = 7$ et pour le graphe G_3, on va utiliser l'algorithme de Welsch-Powell

Sommet	S_2	S_4	S_1	S_3	S_5	S_6
Degré	4	4	2	2	2	2

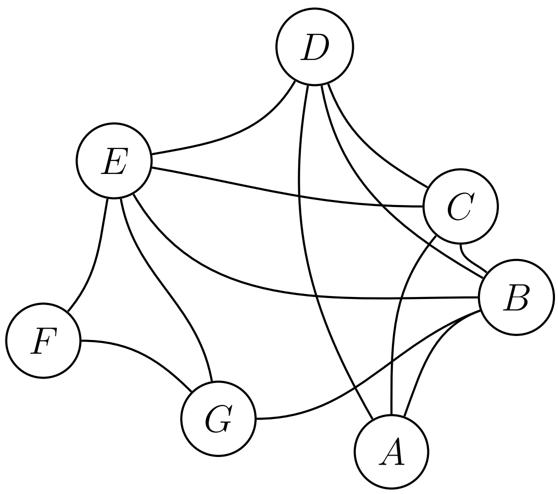






   On a utilisé 2 couleurs pour le coloriage du graphe G_3.
   On a : $2 \leqslant \gamma(G_3) \leqslant 4 + 1 = 5 \Rightarrow \gamma(G_3) = 2$.
3. Le graphe proposé dans cette question n'est pas complet.

Exercice 4 (6 points)



1. On a : $3+5+4+4+5+2+3=26 \Longrightarrow N=\dfrac{26}{2}=13 \Longrightarrow \mathscr{H}$ possède 13 arêtes.

   $\gamma(\mathscr{H})=4$.

2. Le graphe $\mathscr{H}$ est non complet car, par exemple, il manque l'arête $A - E$.

   Le graphe $\mathscr{H}$ est connexe car il existe toujours une chaine reliant 2 sommets distincts.

3. Le sous-graphe formé par les sommets A, B, C et D est complet d'ordre 4 car chaque sommet est de degré : $4-1=3$.

4. a) Il y a 4 sommets de degré impair à savoir : A, B, E et G donc $\mathscr{H}$ n'a pas de chaine eulérienne.

   b) Il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant soit la liaison $A-G$, soit la liaison $E-A$. En effet, il n'y aura dans ce cas que deux sommets de degré impair B, G ou B, E.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	4	5	4	4	6	2	3

ou

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	4	5	4	4	5	2	4

Pour $E - A$, le trajet ira de B à G ou de G à B.

Pour $A - G$, le trajet ira de B à E ou de E à B.

Par exemple : $B-A-C-B-D-C-E-D-A-G-F-E-G-B-E$