Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 3** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 22 / 05 / 2019	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 3 heures

Exercice n°1 : (7pts)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(1\,;2\,;-1)$, $C(-1\,;2\,;0)$ et $I(0\,;1\,;-3)$

1) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

   $b/$ En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+2z-1=0$.

2) Soit S la sphère de centre I et passant par A.

   $a/$ Montrer que S passe par C.

   $b/$ Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est le cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon $\sqrt{5}$.

3) Pour tout réel α. On considère l'ensemble S_α des points $M(x\,;y\,;z)$ du plan tels que : $x^2+y^2+z^2-2y-2\alpha z-1=0$.

   $a/$ Montrer que S_α est la sphère de centre $I_\alpha(0\,;1\,;\alpha)$ et de rayon $R_\alpha=\sqrt{2+\alpha^2}$.

   $b/$ Montrer que S_α passe par les points A et C.

   $c/$ En déduire que pour tout réel α, le plan P coupe S_α suivant un cercle ($\mathscr{C}_\alpha$).

4) $a/$ On désigne par r_α le rayon de ($\mathscr{C}_\alpha$). Montrer que $r_\alpha=\sqrt{\dfrac{6+\alpha^2}{3}}$.

   $b/$ Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $r_\alpha=\sqrt{5}$.

   $c/$ Justifier que les centres des cercles ($\mathscr{C}_{-3}$) et ($\mathscr{C}_3$) sont respectivement le point B et un point B' dont on déterminera les coordonnées.

   $d/$ Vérifier que $ABCB'$ est un losange.

Exercice n°2 : (4 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\cos^2 x.\sin 2x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Montrer que f est $\pi-$périodique.

   $b/$ Etudier la parité de f.

2) $a/$ Montrer que pour tout $x\in IR$, $f'(x)=2\cos x.\cos 3x$.

   $b/$ Etablir le tableau de variations de f sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3) On a tracé une partie de $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la feuille annexe.

Achever le traçage de $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice n°3 : *(4 pts)*

Soit f la fonction définie sur $\left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\sqrt{3}\,x-2\sin x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis étudier les variations de f' sur $\left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$.

$b/$ Calculer $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, en déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

$c/$ Etablir le tableau de variations de f.

2) Soit α un réel de $\left]0\ ,\frac{\pi}{2}\right[$, et Δ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α.

$a/$ Ecrire une équation de Δ.

$b/$ Soit φ la fonction définie sur $\left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(x)=f(x)-f(\alpha)-f'(\alpha)(x-\alpha)$.

Etudier les variations de φ et déterminer le signe de $\varphi(x)$. (On ne demande pas de calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$).

$c/$ En déduire que, pour tout $x\in\left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$, la courbe $\mathscr{C}$ est située au dessus de Δ.

Exercice n°4 : *(5pts)*

1) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a+b=23$.

$a/$ Montrer que $a\wedge b=1$.

$b/$ Trouver a et b sachant que $a<b$ et $a\vee b=126$.

2) On considère dans $I\!N^2$ l'équation $(E): 9x-14y=1$.

$a/$ Vérifier que $(11\ ,7)$ est une solution de (E).

$b/$ Montrer que $(x\ ,y)$ est solution de (E) si, et seulement si $9(x-11)=14(y-7)$.

$c/$ Résoudre dans $I\!N^2$ l'équation (E).

3) Soit n un entier naturel vérifiant le système $S:\begin{cases} n=9\alpha+4 \\ n=14\beta+5 \end{cases}$ où α et β sont deux entiers.

$a/$ Vérifier que l'entier $n_0=103$ est solution de S.

$b/$ Soit n une solution de S. Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 126.

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synthèse n° 3 (22 – 05 – 2019)

Nom et prénom : ……………………………………………………..   Classe : 3 ème Math 1