Lycée Houmet Souk	Devoir de Synthèse N : 3	3 Mathématique 1
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 3 Heures	17 Mai 2018

EXERCICE N : 1 (4 points)

*Une boite contient neuf boules ,quatre noires numérotées **1 , 2 , 3 , 4 ,** trois vertes numérotées **4 , 5 , 6** et deux blanches numérotés **5 , 6** .*

***A)** On tire **simultanément deux boules** numérotés **a** et **b** . Calculer la probabilité des évènements suivants : **A** : « les deux boules tirées portent des numéros pairs »*

***B** : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ; **C** : « **a** et **b** sont des nombres premiers »*

***D** : « les deux boules tirées sont vertes de plus **a** et **b** sont des nombres premiers entre eux »*

***E** : « **4** divise **a + b** » ; **F** : « **5** est un diviseur de **a.b** » ; **G** : « **a + b** divise **2 a + 2 b + 7** » .*

***B)** On tire **successivement et sans remise trois boules** .*

Calculer la probabilité des évènements suivants :

***A'** : « Obtenir exactement deux numéros impairs »*

***B'** : « Obtenir au moins une fois le numéro **5** »*

***C'** : « Le numéro **4** apparaît pour la seule fois au troisième tirage »*

***D'**: « Le numéro **6** apparaît pour la première fois au deuxième tirage» .*

Carl Friedrich Gauss

EXERCICE N : 2 (5.5 points)

On considère dans l'espace (ξ) muni du repère orthonormé direct R (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) ,

*les points **A** (3 , - 3 , 0) , **B** (- 3 , - 3 , 8) , le plan **P** : $x + 2y - 2z + 5 = 0$ et l'ensemble :*

$$(S) = \left\{ M(x , y , z) \in \xi \text{ tels que : } x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 8z = 0 \right\} .$$

***1) a)** Montrer que **(S)** est une sphère dont on précisera le centre **Ω** et de rayon **R** .*

***b)** Vérifier que **[AB]** est un diamètre de **(S)** .*

2)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passante par **Ω** et perpendiculaire à **P

***3)** Déterminer les coordonnées du point **H** intersection de **P** et Δ .*

***4)** Montrer que **P** coupe **(S)** suivant un cercle **($\mathscr{C}$)** dont on précisera le centre et le rayon .*

***5) a)** Soit le plan **Q** : $3x - 4z - 9 = 0$. Montrer que **Q** est tangent à **(S)** en **A** .*

***b)** Donner une équation cartésienne du plan **Q'** strictement parallèle à **Q** et tangent à **(S)** .*

***6)** Soit le point **C** (0 , - 6 , 0) .*

***a)** Calculer le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.*

***b)** Vérifier que **OABC** est un tétraèdre inscrit dans la sphère **(S)** .*

***c)** Calculer **V** le volume du tétraèdre **OABC** .*

Pierre de Fermat

***7)** Donner une équation cartésienne du plan **P '** médiateur du segment **[AH]** .*

8)** Déterminer les coordonnées du point **J** centre de la sphère **(S')** passante par **A** et tangente à **P** en **H

EXERCICE N : 3 (*4.5 points*)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \cos(2x) + 2\sin(x) + \frac{1}{2}$.

On désigne par ***(Cf)*** *la courbe représentative de f dans un repère orthogonal .*

Marin Mersenne

1) a) *Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de* ***(Cf)*** *.*

b) *En déduire qu'il suffit d' étudier f sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.*

2) a) *Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 4\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\cos x$.*

b) *Etudier les variations de f sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.*

3) *Calculer $f(-\frac{\pi}{6})$ et $f(0)$.*

4) *Tracer, dans un repère orthogonal* $\mathbf{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ *la courbe (**Γ**) de la restriction de f sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$*

5) *Soit g la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ par : $g(x) = \cos(2x) + 2\sin(|x|) + \frac{1}{2}$.*

a) *Montrer que pour tout $x \in [0 , \frac{\pi}{2}]$; $g(x) = f(x)$.*

b) *Utiliser (**Γ**) pour construire* ***(Cg)*** *dans le même repère* ***R*** *. (Expliquer)*

c) *Résoudre* ***graphiquement*** *l'encadrement : $\frac{3}{2} < g(x) < 2$.*

EXERCICE N : 4 (*6 points*) **Les parties A et B sont indépendantes**

A) 1) *n est un entier naturel . Montrer que :*

(n est divisible par 10) ***si et seulement si*** *(n est divisible par 2 et 5)*

2) *Soient a et b deux entiers naturel tels que $a \geq b$. Montrer que :*

(a et b ont le même chiffre des unités) ***si et seulement si*** *(a - b est divisible par 10)*

3) *Soient n et p deux entiers naturels non nuls .*

a) *Vérifier que : $n^{p+4} - n^{p} = n^{p-1}(n^{5} - n) = (n^{2} - n)(n^{p} + n^{p-1})(n^{2} + 1)$.*

b) *Déduire, en utilisant le petit théorème de Fermat , que : $n^{p+4} - n^{p}$ est divisible par 10 .*

4) *En utilisant les questions précédentes prouver que 8^{674} et 4^{1013} ont le même chiffre des unités*

B) 1) *Soit x un entier naturel non nul .Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $(x+1)^{n} - 1$ est divisible par x*

2) *Soient p et q deux entiers naturels non nuls :*

a) *Vérifier que : $2^{pq} = [(2^{p} - 1) + 1]^{q}$.*

b) *Déduire que : $2^{p} - 1$ divise $2^{pq} - 1$.*

3) *On appelle* ***nombre de Mersenne*** *tout entier de la forme $\mathbf{M_n = 2^{n} - 1}$, où $n \in IN^* \backslash \{1\}$.*

a) *Vérifier que $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$, $\mathbf{M_5}$ et $\mathbf{M_7}$ sont premiers et que $\mathbf{M_{11}}$ est composé .*

b) *Montrer que , si $\mathbf{M_n}$ est premier alors n est premier . (* ***On pourra raisonner par l'absurde*** *)*

c) *La réciproque est-elle vraie ?*

Wikipédia : *Aujourd'hui ,* ***le plus grand nombre premier connu*** *est de Mersenne* $\mathbf{2^{77232917} - 1}$
qui a été découvert le 26 décembre 2017 par un réseau d'ordinateurs (projet GIMPS / Jonathan Pace)