

**Exercice N°1 :06pts**

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x + 5} + x & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} & \text{si } x > -2 \end{cases}$

1°) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  . interpréter graphiquement le résultat .

2°) a) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x - 1$  est une asymptote à  $\zeta_f$  au voisinage de  $(+\infty)$

b) Etudier le comportement de  $\zeta_f$  au voisinage de  $(-\infty)$  .

3°) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $] - 2 ; + \infty [$  .  $\zeta_g$  sa représentation graphique dans un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  .

a) Montrer que  $g$  est dérivable pour tout réel  $x > - 2$  et que  $g'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de  $g$  .

c) Déterminer les coordonnées du point  $A$  de  $\zeta_g$  tel que la tangente est parallèle à la droite  $D : x - 4y + 2 = 0$

d) Ecrire une équation de la tangente  $D'$  à  $\zeta_g$  issue du point  $B(- 2 ; -1)$  .

**Exercice N°2 :05pts**

Un sac contient six boules rouges numérotées de 1 à 6 et trois boules blanches numérotées de 4 à 6 . Tous indiscernables au toucher. On extrait simultanément deux boules numérotées  $a$  et  $b$

1°) Quelle est la probabilité pour que l'on ait  $a = b$

2°) Quelle est la probabilité des événements suivantes

A : les deux boules tirées de couleurs différents

B : Les deux boules tirées de même couleur

C : Les deux boules tirées portent des numéros de même parités

3°) Quelle est la probabilité pour que l'on ait :  $a + b \equiv 0 \pmod{4}$

4°) Quelle est la probabilité d'extrait deux boules dont une et une seulement porte un numéro Impaire et une seulement rouge.

### Exercice N°3 :05pts

1°) Montrer que ; pour tout entier naturel non nul  $k$  et pour tout entier naturel  $x$  on a :

$$(x - 1) (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{k-1}) = x^k - 1$$

Dans tout la suite de l'exercice ; on considère un nombre entier  $a \geq 2$ .

2°) a) soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $d$  un diviseur de  $n$ .

Montrer que  $(a^d - 1)$  est un diviseur de  $(a^n - 1)$

b) Dédurre que  $(2^{2004} - 1)$  est divisible par 7, par 63 puis par 9

3°) Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels et  $d = m \wedge n$

a) On définit  $m = d \cdot m'$  et  $n = d \cdot n'$ . Montrer que  $m' \wedge n' = 1$ .

b) On suppose  $u$  et  $v$  strictement positif tels que  $d = m \cdot u - n \cdot v$

Montrer que  $(a^{m \cdot u} - 1) - (a^{n \cdot v} - 1) = a^d - 1$

c) Montrer que  $(a^d - 1)$  est un diviseur de  $(a^{m \cdot u} - 1)$  et de  $(a^{n \cdot v} - 1)$

d) Déterminer on utilisant le résultat précédent ; un diviseur commun de  $(2^{63} - 1)$  et  $(2^{60} - 1)$

### Exercice N°4 :04pts

A°) Calculer les réels  $a$  ;  $b$  et  $c$  sachant que :

$$\begin{cases} (a; b; c) \text{ est une suite géométrique} \\ a + b + c = 91 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{13}{63} \\ a < b < c \end{cases}$$

B°) 1°) on pose  $U_n = \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{2.4.6 \dots (2n)}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $U_n = \frac{(2n+1)!}{2^n (n!)^2}$

2°) on pose  $V_n = \sum_{k=0}^n C_k$

a) Calculer  $V_0$  et  $V_1$  et  $V_2$

b) En utilisant la formule de binôme –Newton ; Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont-on précisera la raison

c) Dédurre la valeur de la somme :  $S = \sum_{k=0}^{15} \sum_{j=0}^k V_k$



