Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 3** *Mathématiques*	*Niveau : 3 ème Math*
Date : 27 / 05 / 2015	*Prof : MEDDEB Tarek*	*Durée : 3 heures*

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (6 pts)

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+U_n} \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$.

1) $a/$ Montrer par récurrence que : $1 \leq U_n \leq \dfrac{3}{2}$, *pour tout* $n \in IN$.

$b/$ Montrer que : $U_n \neq \sqrt{2}$, *pour tout* $n \in IN$.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $\dfrac{U_{n+1}-\sqrt{2}}{U_n-\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+U_n}$.

$b/$ En déduire que, pour tout $n \in IN$, on a : $\left|U_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leq \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\left|U_n-\sqrt{2}\right|$.

$c/$ En déduire que, pour tout $n \in IN$, $\left|U_n-\sqrt{2}\right| \leq \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n$.

$d/$ Montrer alors que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

3) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $\dfrac{U_{n+2}-\sqrt{2}}{U_n-\sqrt{2}} = \dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{\left(1+U_n\right)\left(1+U_{n+1}\right)}$.

$b/$ En déduire que, pour tout $n \in IN$, $0 < \dfrac{U_{n+2}-\sqrt{2}}{U_n-\sqrt{2}} < 1$.

4) On pose $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$, pour tout $n \in IN$.

$a/$ En utilisant le résultat de 3) $b/$, montrer par récurrence que $V_n < \sqrt{2}$, pour tout $n \in IN$.

$b/$ En déduire que la suite V est croissante.

On admet dans la suite que $W_n > \sqrt{2}$, pour tout $n \in IN$, et que la suite W est décroissante.

$c/$ Etablir les encadrements suivants : $1 < \dfrac{7}{5} < \sqrt{2} < \dfrac{17}{12} < \dfrac{3}{2}$.

Exercice n°2 : (5 pts)

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \ \ pour\ tout\ n \in IN \end{cases}$

1) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN^*$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.
   $b/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $u_n = 2^n - 1$.
   $c/$ Calculer alors $(2^n - 1) \wedge (2^{n+1} - 1)$.
2) $a/$ Vérifier que, pour tout $(n\,;p) \in IN^2$ on a : $u_{n+p} = u_n(u_p + 1) + u_p$.

   $b/$ En déduire que : $u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}$. [1]

   $c/$ Montrer, par récurrence sur k, que : pour tout $n \in IN^*$, pour tout $k \geq 2$, u_{kn} est divisible par u_n.
3) Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On désigne par r le reste de la division euclidienne de a par b.

   $a/$ Déduire de [1] que : $u_b \wedge u_r = u_a \wedge u_b$.

   $b/$ Calculer alors $u_{2015} \wedge u_{416}$.

Exercice n°3 : (4,5 pts)

A - On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si, et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire.

1) Démontrer que $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$.
2) Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements A et $\overline{B}$ sont également indépendants.

B - Chaque matin de classe, Sarah peut être victime de deux événements indépendants :

- R : « Elle n'entend pas son réveil sonner ».
- S : « Son scooter tombe en panne ».

On admet que chaque jour de classe : $p(R) = \frac{1}{5}$ et que $p(S) = \frac{1}{10}$.

Lorsqu'au moins l'un des deux événements se produit, Sarah est en retard au lycée, sinon elle est à l'heure.

1) Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Sarah entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

2) Calculer la probabilité que Sarah ne soit pas à l'heure au lycée un jour de classe donné.

3) Au cours d'une semaine, Sarah se rend six fois au lycée. On admet que le fait qu'elle entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'elle l'entende ou non les jours suivants.

$a/$ Calculer la probabilité que Sarah entende le réveil exactement cinq fois au cours d'une semaine.

$b/$ Calculer la probabilité que Sarah entende le réveil au moins une fois au cours d'une semaine.

Exercice n°4 : ***(4,5 pts)***

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) On considère l'ensemble S d'équation : $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$.

Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

2) Pour tout réel m, on considère le plan P_m d'équation : $x+z+m=0$.

Déterminer m pour que P_m coupe S suivant un cercle de rayon $r=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

3) Dans la suite de l'exercice, on prend $m=0$ et on pose $P_0=P$.

Montrer que l'intersection de P et S est un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

4) On pose $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}-\vec{k}\right)$, Montrer que le repère $\left(O,\vec{u},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé de P.

5) Soit $M\left(x;y;z\right)$ selon le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on désigne par $\left(X;Y\right)$ les coordonnées de M dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{j}\right)$.

$a/$ Exprimer X et Y en fonction de x, y et z.

$b/$ En déduire une équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{j}\right)$.

Bonne chance