



3^{ème} Maths : M_{1+2+3}
Date : le 03 / 06 / 2011

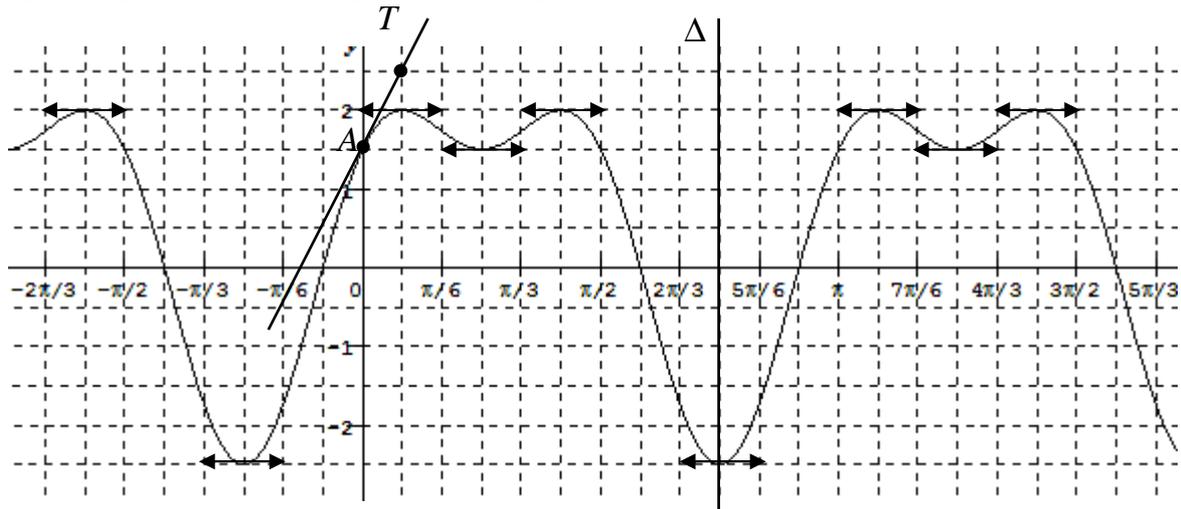
Durée : 3 heures
Coefficient : 4

Enseignants : Belkacem. H
Ghadhab. L – Machta. F

Exercice N°1 :

2,5 points

Dans le graphique ci-dessous représente une partie de courbe d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



On sait que :

- $\Delta : x = \frac{3\pi}{4}$ est un axe de symétrie pour la courbe C_f .
- T la tangente à C_f au point $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .

Pour chacune des questions suivantes, une **seule** des trois réponses proposées est **exacte**.

Par une lecture graphique :

- 1) a) $f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - f(x) = 0$ b) $f\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) - f(x) = 0$ c) $f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + f(x) = 0$
- 2) a) $f'(0) = \frac{\pi}{12}$ b) $f'(0) = \frac{3}{2}$ c) $f'(0) = \frac{12}{\pi}$
- 3) a) $f'\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 0$. b) $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) < f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$. c) $f'(x) \geq 0$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{12}\right]$
- 4) f est périodique de période :
a) $\frac{\pi}{2}$. b) π . c) 2π
- 5) $f\left(\frac{135\pi}{12}\right) =$
a) $\frac{3}{2}$. b) $-\frac{5}{2}$. c) 2

Exercice N° 2:

2,5 points

Dans le tableau statique ci-dessous, la variable X désigne le nombre de jours après la naissance de nourrisson et la variable Y le poids en kilogrammes :

X (en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y (en kg)	3.7	3.75	3.80	3.90	4	4.35	4.5

- 1) a- Calculer la moyenne \bar{X} et l'écart type σ_X de la variable X . 0,5
 b- Calculer la moyenne \bar{Y} et l'écart type σ_Y de la variable Y . 0,25
- 2) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points associés à la série (X, Y) ainsi le point moyen G . 0,5
- 3) a – Déterminer les coordonnées des point moyen G_1 du nuage des points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$ 0,25
 Déterminer les coordonnées du point moyen G_2 du nuage M_4, M_5, M_6 et M_7 . 0,25
 b – En déduire une équation de la droite d'ajustement linéaire D de Y en fonction de X 0,5
- 4) Quelle pourrait être une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance ? 0,25

Exercice N° 3:

4 points

I – Une urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher, réparties comme suit :

- 4 blanches numérotées : 0, 0, 1, 2
- et 3 rouges numérotées : 1, 1, 1.

- 1) On tire au hasard et simultanément **trois boules** de l'urne.
 Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants : 0,25
A : « Obtenir trois boules de même couleur » 0,25
B : « Obtenir trois boules portant le même numéro » 0,25
C : « Obtenir trois boules portant le même numéro et de même couleur » 0,25
D : « Obtenir trois boules portant le même numéro ou de même couleur » 0,25
E : « Obtenir au moins une boule blanches » 0,25
F : « parmi les trois boules tirées il y a une seule boule blanche et une seule boule portant le numéro 0 » 0,25
- 2) On tire au hasard successivement et sans remise **quatre boules** de l'urne .
 Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants : 0,25
G : « Obtenir deux boules rouges et deux boules blanches » 0,25
H : « La somme des numéros marqués sur les boules tirées égale à 5 » 0,25
I : « Obtenir une boule numérotée 0 pour la première fois au troisième tirage » . 0,5

II – Une urne U_2 contient 6 boules numérotées : 1, 2, 2, 2, 3, 3.

On tire, au hasard, une boule de l'urne U_1 puis une boule de U_2 . On désigne par a le numéro inscrit sur la boule tirée de U_1 et par b celui de la boule tirée de U_2 .

L'espace est muni d'un repère orthonormé de sens direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(1, 0, 1)$ et $D(0, 0, 2)$ quatre points de l'espace.

- a – Montrer que $\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = b(a - 2)$ 0,5
- b – Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants : 0,5
J : « $ABCD$ est un tétraèdre » 0,5
K : « le volume de tétraèdre $ABCD$ est égale $\frac{1}{6}$ » 0,5

Exercice N° 4:

6 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour tout réel m on considère le plan $Q_m : mx + (m+1)y = 0$ et le plan $P : y + z + 3 = 0$

Soit \vec{n}_Q un vecteur normal à Q_m et \vec{n}_P un vecteur normal à P

1) Déterminer m tel que Q_m soit perpendiculaire à P .

0,75

2) a – Déterminer les composantes de $\vec{n}_Q \wedge \vec{n}_P$

0,25

b – Déterminer, si c'est possible, m tel que Q_m soit parallèle à P .

0,25

Dans la suite on prend : $m = -1$ et on pose $Q = Q_{-1}$.

3) On considère le point $H(0; -1; 0)$ et le cercle ζ contenu dans le plan Q , de centre H et de rayon 1. On désigne par Δ l'axe du cercle ζ . (Δ passe par H et perpendiculaire à Q)

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

0,5

4) On considère les points $A(1, -2, 1)$, $B(1, 0, -1)$ et $I(1, -1, 0)$ et soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$.

a – Montrer que, S est une sphère de centre I et dont on déterminera son rayon R .

0,75

b – Vérifier que les points A et B sont diamétralement opposés sur la sphère S .

0,5

c – On donne le point $M(t; -1-t; -3+2t)$; où t est un réel.

Calculer $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ puis déduire les valeurs de t pour lesquelles M appartient à S .

1

On prend dans la suite $t = 1$ et $M(1; -2; -1)$

5) On considère la droite D dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 3 + 2\beta \\ y = -1 + \beta \\ z = -2 - \beta \end{cases}; \beta \in \mathbb{R}.$$

a – Vérifier que M appartient à D et déterminer un vecteur \vec{u} directeur de D .

0,5

b – Montrer que D est tangente à S en M .

0,5

c – Vérifier que D est incluse dans P puis déduire la position relative de S et P .

0,5

6) Montrer que Q et S sont sécants suivant le cercle ζ .

0,5

Exercice N° 5:

5 points

I –

1) a- Montrer que l'entier 2011 est premier.

0,25

b- En déduire le reste de la division euclidienne de l'entier

$A = 2^{2010} + 3^{2011} + 4^{2012} + 5^{2013}$ par 2011

1,25

2) a- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \times 3^{5n+4} + 3$ est divisible par 11.

0,75

b- En déduire le reste de la division euclidienne de $4 \times 3^{2019} + 13$ par 11.

0,5

II –

1) Montrer que pour tous entiers naturels non nuls a, b et c on a : $(bc - a) \wedge b = a \wedge b$

0,5

2) Soit n un entier naturel non nul

a- Vérifier que $5n^3 - n + 38 = (n + 2)(5n^2 - 10n + 19)$

0,25

b- En déduire que $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = (n + 2) \wedge 38$

0,25

c- Quelles sont les valeurs possibles de $(5n^3 - n) \wedge (n + 2)$.

0,25

d- Pour quelles valeurs de n , le nombre $E = \frac{5n^3 - n}{n + 2}$ est-il un entier naturel ?

0,5

e- Déterminer les entiers naturels n tels que $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = 19$

0,5

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°3

EXERCICE N°1 :

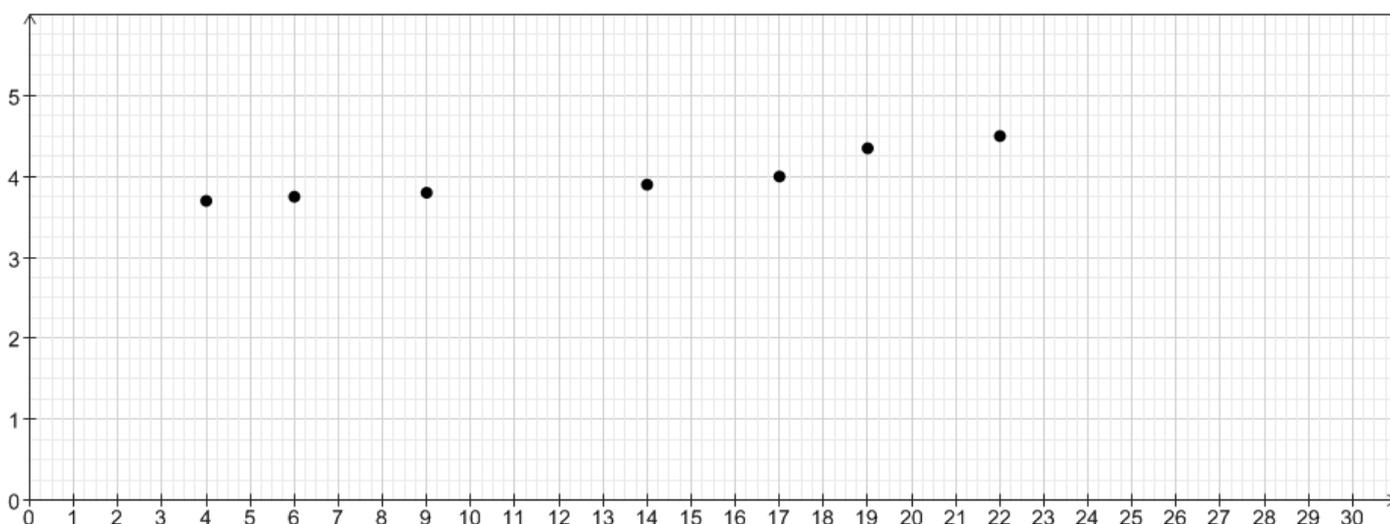
- 1) a) 2)c) 3)c) 4)b) 5)a)

EXERCICE N°2 :

$$1) a) \bar{X} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i = 13 ; \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \text{ où } V(X) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i^2 - \bar{X}^2 = 40 \text{ alors } \sigma(X) = \sqrt{40} \approx 6.32$$

$$b) \bar{Y} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 y_i = 4 ; \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \text{ où } V(Y) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 y_i^2 - \bar{Y}^2 \approx 0.08 \text{ alors } \sigma(Y) \approx 0.28$$

$$2) G(\bar{X}, \bar{Y}) \Leftrightarrow G(13, 4)$$



$$3) a) G_1(\bar{X}_1, \bar{Y}_1) ; \left. \begin{array}{l} \bar{X}_1 = \frac{4+6+9}{3} \approx 6.33 \\ \bar{Y}_1 = \frac{3.7+3.75+3.8}{3} = 3.75 \end{array} \right\} \Rightarrow G_1(6.33 ; 3.75)$$

$$G_2(\bar{X}_2, \bar{Y}_2) ; \left. \begin{array}{l} \bar{X}_2 = \frac{14+17+19+22}{4} = 18 \\ \bar{Y}_2 = \frac{3.9+4+4.35+4.5}{4} \approx 4.19 \end{array} \right\} \Rightarrow G_2(18 ; 4.19)$$

$$b) Y = aX + b$$

$$a = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_2 - \bar{X}_1} \approx 0.04 \quad ; \quad b = \bar{Y}_1 - 0.04\bar{X}_1 \approx 3.5 \quad \Rightarrow \quad Y = 0.04X + 3.5$$

4) on prend

$$X = 30 \Rightarrow Y = 0.04 \times 30 + 3.5 = 4.7 \text{ kg}$$



EXERCICE N°3 :

$$I-1) P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_7^3} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \quad ; \quad P(B) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35} \quad ; \quad P(C) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$$

$$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \left| \quad P(\bar{E}) = \frac{C_3^3}{35} = \frac{1}{35} \Rightarrow P(E) = 1 - P(\bar{E}) \right.$$

$$= \frac{5}{35} + \frac{4}{35} - \frac{1}{35} = \frac{8}{35} \quad \left. \vphantom{P(D)} \right| \quad = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$$

$$P(F) = \frac{C_2^1 \times C_3^2}{35} = \frac{6}{35}$$

$$1) P(G) = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{18}{35} \quad ; \quad P(H) = \frac{4!}{3!} \times \frac{1}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{96}{840} = \frac{4}{35}$$

$$P(I) = \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{21}$$

$$II - \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1-a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$a -$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -a & 1-a & -a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1-a & -a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -b(2-2a+a) = -b(2-a) = b(a-2)$$

$b - ABCD$ est un tétraèdre si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \neq 0$ et si seulement $b(a-2) \neq 0$

$$\text{Donc } a \neq 2 \text{ et } b \neq 0 : P(J) = \frac{6}{7} \times 1 = \frac{6}{7}$$

$$\bullet V(ABCD) = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} |b(a-2)|$$

$$V(ABCD) = \frac{1}{6} \text{ si et seulement si } |b(a-2)| = 1 \text{ donc } a = 1 \text{ et } b = 1$$

$$\text{alors } P(K) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$$

EXERCICE N°4 :

$$1) \vec{n}_Q \begin{pmatrix} m \\ m+1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{n}_P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_m \perp P \quad \text{ssi } \vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 0$$

$$\text{ssi } m+1 = 0$$

$$\text{ssi } m = -1$$

$$2) a - \left[\begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline m+1 & 1 \\ 0 & 1 \\ m & 0 \\ m+1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \vec{n}_Q \wedge \vec{n}_P \left(\begin{array}{c|c} m+1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ m & 0 \\ m & 0 \\ m+1 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \vec{n}_Q \wedge \vec{n}_P \begin{pmatrix} m+1 \\ -m \\ m \end{pmatrix}$$

b-

$Q_m // P$ ssi \vec{n}_Q et \vec{n}_P sont colinéaires

$$\text{ssi } \vec{n}_Q \wedge \vec{n}_P = \vec{0} \quad .$$

$$\text{ssi } \begin{cases} m+1=0 \\ -m=0 \\ m=0 \end{cases} \quad \text{ssi } \begin{cases} m=-1 \\ m=0 \end{cases}$$

\Rightarrow C'est ce qui est impossible .

3) $Q: -x=0$

Δ est l'axe de cercle ζ alors Δ est perpendiculaire à Q en H .

Et par suite $\vec{n}_Q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ .

$$\Rightarrow \Delta = D(H, \vec{n}_Q)$$

Soit $M(x, z, y) \in \Delta$ ssi $\overrightarrow{HM} = \alpha \vec{n}_Q ; \alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{ssi } : \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{est une représentation paramétrique de } \Delta$$

4) a-

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$$

$$a = -2 ; b = 2 ; c = 0 ; d = 0 \quad .$$

$$h = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d = \frac{4+4}{4} = 2 > 0$$

Donc S est une sphère de rayon $R = \sqrt{h} = \sqrt{2}$ et de centre $I \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \Leftrightarrow I(1, -1, 0)$.

$$b- \left. \begin{array}{l} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2}{2} = 1 = x_I \\ \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{2}{2} = -1 = y_I \\ \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{0}{2} = 0 = z_I \end{array} \right\} \Rightarrow I = A * B$$

On a $1^2 + (-2)^2 + 1^2 - 2 + 2(-2) = 1 + 4 + 1 - 2 - 4 = 0$ Donc $A \in S$

$\left. \begin{array}{l} A \in S \\ I = A * B \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ et } B \text{ sont diamétralement opposés sur } S$

$$c - \overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 1-t \\ -1+t \\ 4-2t \end{pmatrix} ; \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 2-2t \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (1-t)^2 + (t+1)(t-1) + (4-2t)(2-2t) \\ &= 1 - 2t + t^2 + t^2 - 1 + 8 - 8t - 4t + 4t^2 \\ &= 6t^2 - 14t + 8 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \in S \\ [AB] \text{ un diamètre de } S \end{array} \right\} \text{ donc } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \quad \text{ssi } 6t^2 - 14t + 8 = 0$$

$$6 + (-14) + 8 = 0$$

$$t' = 1 \quad \text{et} \quad t'' = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$5) a - \begin{cases} 1 = 3 + 2\beta \\ -2 = -1 + \beta \\ -1 = -2 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = -2 \\ \beta = -1 \\ -\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \beta = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}.$$

Donc $M \in D$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D .

b - $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{IM} = -1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{IM}$ et comme $M \in S$ alors D est tangente à S en M

c - $\vec{n}_P \cdot \vec{u} = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}_P$. On a : $-2 - 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow M \in P$

Et par la suite la droite D est incluse dans P .

$\left. \begin{array}{l} D \subset P \\ S \text{ et } D \text{ sont tangentes en } M \end{array} \right\} \Rightarrow S \text{ et } P \text{ sont tangents en } M$

$$6) d(I, Q) = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1 \text{ et } R = \sqrt{2}.$$

$d(I, Q) < R$ donc S et Q sont sécants suivant un cercle ζ'



$$\text{On a } \overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{n_Q} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} H \in Q \\ \overrightarrow{IH} \text{ et } \overrightarrow{n_Q} \text{ sont colinéaires} \end{array} \right\} \Rightarrow H \text{ est le projeté orthogonal de } I \text{ sur } Q$$

Et par suite H est le centre du cercle ζ' de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, Q)} = \sqrt{2-1} = 1$

\Rightarrow Conclusion : $\zeta' = \zeta$

EXERCICE N°5 :

I -

1) a) $\sqrt{2011} \approx 44.84$.

2011 n'est pas divisible par 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41 et 43.

Donc 2011 est un nombre premier.

b) 2011 est un nombre premier et 2 n'est pas divisible par 2011

Donc d'après le petit théorème de Fermat :

$$2011 \mid (2^{2010} - 1) \text{ alors } 2^{2010} - 1 = 2011 k_1 \quad (k_1 \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow 2^{2010} = 2011 k_1 + 1$$

* 2011 un nombre premier, d'après le petit théorème de Fermat :

$$2011 \mid (3^{2010} - 3) \text{ alors } 3^{2010} - 3 = 2011 k_2 \quad (k_2 \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow 3^{2010} = 2011 k_2 + 3$$

* 2011 un nombre premier, d'après le petit théorème de Fermat :

$$2011 \mid (4^{2010} - 4) \text{ alors } 4^{2010} - 4 = 2011 k_3 \quad (k_3 \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow 4^{2010} = 2011 k_3 + 4$$

$$\Leftrightarrow 4^{2012} = 2011(4k_3) + 16$$

* 2011 un nombre premier, d'après le petit théorème de Fermat :

$$2011 \mid (5^{2010} - 5) \text{ alors } 5^{2010} - 5 = 2011 k_4 \quad (k_4 \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow 5^{2010} = 2011 k_4 + 5$$

$$\Leftrightarrow 5^{2013} = 2011(25k_4) + 125$$

On alors

$$\begin{aligned} 2^{2010} + 3^{2010} + 4^{2012} + 5^{2013} &= (2011k_1 + 1) + (2011k_2 + 3) + (2011(4k_3) + 16) + (2011(25k_4) + 125) \\ &= 2011(k_1 + k_2 + 4k_3 + 25k_4) + 145 \\ &= 2011k + 145 \end{aligned}$$

Le reste de la division euclidienne de A par 2011 est 145.



2) a- Soit la propriété $P(n): \forall n \in \mathbb{N}, 11/2 \times 3^{5n+4} + 3$

*pour $n = 0$; $2 \times 3^4 + 3 = 165$ On a : $11/165$ alors $P(0)$ est vraie.

*Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $11/2 \times 3^{5n+4} + 3$ Montrons que $11/2 \times 3^{5(n+1)+4} + 3$.

$$\begin{aligned} 2 \times 3^{5(n+1)+4} + 3 &= 2 \times 3^{5n+9} + 3 \\ &= 2 \times 3^5 \times 3^{5n+4} + 3 \\ &= 3^5 (2 \times 3^{5n+4} + 3) - 3 \times 3^5 + 3 \\ &= 3^5 (2 \times 3^{5n+4} + 3) - 726 \end{aligned}$$

On a $11/2 \times 3^{5n+4} + 3$ d'après l'hypothèse de récurrence

$$\text{Alors } 11/3^5 (2 \times 3^{5n+4} + 3)$$

On a $11/726$

Donc $11/2 \times 3^{5(n+1)+4} + 3$; $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}; 11/2 \times 3^{5n+4} + 3$

b-

$$2019 = 5 \times 403 + 4$$

$$= 5n + 4 \quad \text{avec } (n = 403)$$

$$4 \times 3^{2019} + 13 = 2(2 \times 3^{2019} + 3) - 6 + 13$$

$$= 2(2 \times 3^{2019} + 3) + 7 \quad \text{avec } 2 \times 3^{2019} + 3 \text{ est divisible par } 11$$

Donc le reste de la division euclidienne de $4 \times 3^{2019} + 13$ par 11 est 7.

II -

1) Soit $d = (bc - a) \wedge b$ et $d' = a \wedge b$.

$$\text{On a } d = (bc - a) \wedge b \text{ alors : } \left. \begin{array}{l} d/(bc - a) \\ d/b \end{array} \right\} \Rightarrow d/(bc - (bc - a)) \Leftrightarrow d/a$$

Comme : d/b et d/a alors $d/a \wedge b \Leftrightarrow d/d'$

$$\text{On a } d' = a \wedge b \text{ alors : } \left. \begin{array}{l} d'/a \\ d'/b \end{array} \right\} \Rightarrow d'/(bc - a)$$

Comme : $d'/(bc - a)$ et d'/b alors $d'/(bc - a) \wedge b \Leftrightarrow d'/d$

Conclusion : $d' = d$



2)

$$a- (n+2)(5n^2 - 10n + 19) = 5n^3 - n + 38$$

$$b- 5n^3 - n = (n+2)(5n^2 - 10n + 19) - 38$$

$$\text{alors } (5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2)(5n^2 - 10n + 19) - 38 \wedge (n+2) \\ = 38 \wedge (n+2)$$

d'après 2) on prend $b = (n+2)$, $c = (5n^2 - 10n + 19)$ et $a = 38$

c- les valeurs possibles de $(5n^3 - n) \wedge (n+2)$ sont 1, 2, 19 et 38

d- E est un entier naturel si et seulement si $(n+2) \mid (5n^3 - n)$

$$\text{alors } (5n^3 - n) \wedge (n+2) = n+2$$

$n+2$ peut donc prendre les valeurs 1, 2, 19, 38 .

Les valeurs de n qui conviennent sont 17, 36 .

$$e- \text{ On a } 19 \wedge 38 = 19$$

$$\text{On a } bc - a \wedge b = a \wedge b$$

$$\text{On prend } a = 19, b = 38$$

$$(38c - 19) \wedge 38 = 19 \wedge 38 = 19$$

$$n+2 = 38c - 19 \quad ; c \in \mathbb{N}^*$$

$$n = 38c - 21$$

