

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<i>Devoir de Synthèse n° 2</i> Mathématiques	Niveau : 2 ^{ème} Info
Date : 02 / 03 / 2010	Prof: MEDDEB Tarak	Durée : 2 heure

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (5 pts)

Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 3U_n + 3^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .

2) On pose, pour tout entier n , $V_n = \frac{U_n}{3^n}$.

a/ Montrer que V est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme V_0 .

b/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

Exercice n°2 : (5 pts)

Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = U_n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer U_1 et U_2 .

2) On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ et

$$S'_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

a/ Montrer que : $S'_n - S_n = U_n - 2$.

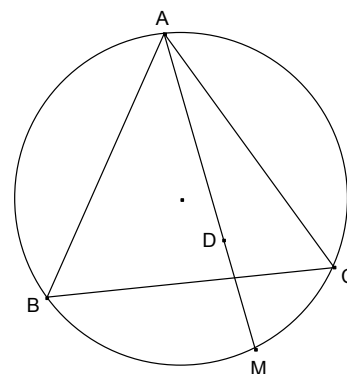
b/ En remarquant que : $U_{n+1} - U_n = n$, montrer que :

$$S'_n - S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1).$$

c/ En déduire que : $U_n = \frac{n^2 - n + 4}{2}$.

Exercice n°3 : (4 pts)

Soit ABC un triangle équilatéral direct et \mathcal{C} le cercle circonscrit à ce triangle. M est un point de l'arc $[BC]$ qui ne contient pas A . D est le point du segment $[MA]$ tel que $MC = MD$. (voir figure)



1) Montrer que le triangle MCD est équilatéral.

2) Soit r la rotation directe de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

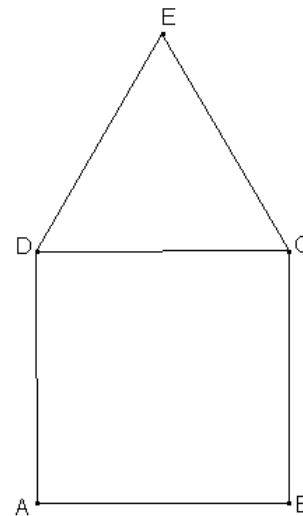
a/ Déterminer : $r(A)$ et $r(D)$.

b/ En déduire que : $MA = MB + MC$.

Exercice n°4 : (6 pts)

On considère un carré $ABCD$ de côté a . ($a \in \mathbb{R}^*$)

On construit à l'extérieur de ce carré le triangle équilatéral DCE .



1) a/ Quelle est la nature du triangle DAE ?

b/ Déduire que $\widehat{DAE} = \frac{\pi}{12}$.

2) Soit I le milieu de $[DC]$ et H le projeté orthogonal de E sur (AD) .

a/ Exprimer EI en fonction de a .

b/ En déduire que : $AH = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$.

c/ Montrer alors, que : $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

3) a/ Montrer que, pour tout $\alpha \in [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$, on a : $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

b/ Montrer alors que : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

c/ Calculer : $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\cos \frac{5\pi}{12}$.

Bonne chance