

**Exercice n°1 : (3 points)**

- 1) Discuter suivant les valeurs de l'entier naturel  $k$ , le reste modulo 7 de  $2^k$
- 2) Déterminer le reste modulo 7 de  $2011^{2015}$
- 3) Déterminer le reste modulo 7 de  $S_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$

**Exercice n°2 : (4 points)**

On considère la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier non nul  $n$  par :

$$S_n = \frac{1}{n} [\ln(n+1) + \ln(n+2) + \ln(n+3) + \dots + \ln(2n)] - \ln(n)$$

1)a) Calculer  $S_1$  et  $S_2$

b) Montrer que pour tout entier non nul  $n$  :  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

2)a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ; montrer que :  $\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$  où  $0 \leq k \leq n-1$

b) En déduire que pour tout entier non nul  $n$  :  $S_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln(x) dx \leq S_n$

3) Montrer que la suite  $(S_n)$  est convergente et calculer sa limite.

**Exercice n°3 : (6 points)**

Dans le plan orienté on considère un losange ABCD tel que :  $(\widehat{BC, BA}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$

On désigne par E le symétrique de A par rapport à C et par F le symétrique de A par rapport à B.

Soit R la rotation de centre A et d'angle  $-\pi/3$

Soit S la similitude directe qui transforme D en E et C en F.

1) On pose  $h = S \circ R^{-1}$

a) Déterminer  $h(C)$  et  $h(B)$ .

b) En déduire que  $h$  est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

2) Soit  $\sigma$  la similitude indirecte telle que  $\sigma(E) = C$  et  $\sigma(F) = B$ .

a) Déterminer le rapport de  $\sigma$ . En déduire que  $\sigma$  admet un centre qu'on notera  $\Omega$ .

b) On désigne par  $\Delta$  l'axe de  $\sigma$  et G le point d'intersection des droites  $\Delta$  et (CE).

On pose  $G' = \sigma(G)$ . Montrer que  $\overline{\Omega G} = 2 \overline{\Omega G'}$

3) Montrer que  $(EF) // \Delta$ . (Indication : si  $D // \Delta$  alors  $S_{\Delta}(D) // \Delta$ )

4) Soit  $E' = S_{\Delta}(E)$ .

a) Montrer que G est le centre de gravité du triangle  $\Omega EE'$ . En déduire que  $\overrightarrow{GE'} = -2 \overrightarrow{GC}$

b) Construire le point G, l'axe  $\Delta$  et le centre  $\Omega$  de  $\sigma$ .

### Exercice n°4 : (7 points)

On donne les fonctions f et g définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = (1-x)\sqrt{x} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = -x \ln x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

les courbes  $C_f$  et  $C_g$  sont données dans le graphique suivant :

1) a) Etudier la dérivabilité de f et g à droite en 0

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Dresser le tableau de variations de g

2) On s'intéresse dans la suite à la différence  $f(x) - g(x)$  et

on se propose d'en étudier le signe. À cet effet, on pose,

pour tout réel x de  $]0 ; +\infty[$ , 
$$\varphi(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}.$$

a) Vérifier que : 
$$\varphi(x) = \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

b) Montrer que pour tout x strictement positif 
$$\varphi'(x) = -\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2x\sqrt{x}}.$$

c) Dresser le tableau de variation de  $\varphi$ . En déduire le signe de  $\varphi$ . Conclure

3) Est-ce que les courbes  $C_f$  et  $C_g$  ont même tangente au point de contact d'abscisse 1 ?

4) Pour tout réel a de l'intervalle  $]0 ; 1]$  on pose :

$$I(a) = \int_a^1 f(x) dx \quad \text{et} \quad J(a) = \int_a^1 g(x) dx.$$

a) Calculer l'intégrale I(a) en fonction de a

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer J(a) en fonction de a.

c) Calculer :  $\lim_{a \rightarrow 0} (I(a) - J(a))$ . Donner une interprétation géométrique de cette limite.

