

YOUSSEFBOULILA
PRODUIT VECTORIEL DANS E

D Une unité de longueur est fixée dans tout ce cours, le cm.
Généralités: par exemple

1) Définition:

On retiendra: Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de E , est le vecteur noté: $\vec{u} \wedge \vec{v}$
défini par: Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
Sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est: Le vecteur orthogonal à chacun des vecteurs \vec{u} et \vec{v}
tel que: $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ forme une base directe de E et
tel que: $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$

2) Exemples: Dessiner en perspective les vecteurs: \vec{u} ; \vec{v} ; $\vec{u} \wedge \vec{v}$; $\vec{v} \wedge \vec{u}$; $\vec{u} \wedge (2\vec{v})$; $\vec{u} \wedge (-2\vec{v})$

- i) $|\vec{u}| = 2$ et $\vec{v} = k\vec{u}$ ($k \in \mathbf{R}$)
- ii) $|\vec{u}| = 2$; $|\vec{v}| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 30^\circ$

3) Interprétation géométrique de $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$:

Dessiner deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de même origine. Compléter la figure pour obtenir un parallélogramme

Exprimer l'aire du parallélogramme en fonction de: $|\vec{u}|$; $|\vec{v}|$ et (\vec{u}, \vec{v})

On retiendra: $A_{\text{parallélogramme ABDC}} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$
 $A_{\text{triangle ABC}} =$

II) Propriétés du produit vectoriel:

1) commutativité: Pour tous vecteurs: \vec{u} et \vec{v} de E , $\vec{v} \wedge \vec{u} =$

2)a) Pour tout réel k et tout vecteur \vec{u} de E , $\vec{u} \wedge (k\vec{v}) =$ _____ $=$ _____

b) Pour tous réels α et β et tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de E , $(\alpha\vec{u}) \wedge (\beta\vec{v}) =$ _____

3) Distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition des vecteurs:

a) Pour tous vecteurs: \vec{u} ; \vec{v} et \vec{w} de E , $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) =$ _____
(Admis)

b) Pour tous réels α ; β ; α' et β' , et tous vecteurs \vec{u} ; \vec{v} ; \vec{u}' et \vec{v}' de E ,
 $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge (\alpha'\vec{u}' + \beta'\vec{v}') =$ _____

III) Expression analytique du produit vectoriel de deux vecteurs: $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{u}'(x';y';z')$:

E est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) Préliminaires: *) $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} =$ _____
*) $\vec{i} \wedge \vec{j} =$ _____ ; $\vec{i} \wedge \vec{k} =$ _____ ; $\vec{j} \wedge \vec{i} =$ _____ ; $\vec{j} \wedge \vec{k} =$ _____ ; $\vec{k} \wedge \vec{i} =$ _____ ; $\vec{k} \wedge \vec{j} =$ _____

2)a) $\vec{u} \wedge \vec{u}' =$ _____ $=$ _____ $=$ _____

On retiendra:

Dans un repère orthonormé direct de E , Si $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{u}'(x';y';z')$

Les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ sont: $\left\langle \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \right\rangle : \vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} ;$

$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

3) Remarques: i) On retrouve ici la propriété: \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires \Leftrightarrow _____

ii) $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ est un vecteur orthogonal à \vec{v} et orthogonal à \vec{v}' , d'où des vérifications \Leftrightarrow

4) Exercices: 1) Calculer les produits vectoriels: $\vec{u} \wedge \vec{v}$; $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$; $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$
 i) $\vec{u}(0;1;1)$; $\vec{v}(2;0;-1)$ et $\vec{w}(-1;-1;3)$
 ii) $\vec{u}(2;1;1)$; $\vec{v}(3;1;-1)$ et $\vec{w}(1;-2,5;0,5)$; Remarques et vérifications ?

2)a) Déterminer un vecteur non nul orthogonal aux vecteurs: $\vec{u}(-1;2;3)$ et $\vec{u}'(-3;-1;4)$

b) Déterminer une équation cartésienne du plan $P=(A(1;-2;1); \vec{u}(-1;2;3); \vec{u}'(-3;-1;4))$

3) On considère les droites: $D: \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -2 - k \\ z = 3 + 2k \end{cases} (k \in \mathbf{R})$ et $D': \begin{cases} x = 1 - k \\ y = -2 - k \\ z = 3 \end{cases} (k \in \mathbf{R})$

a) Déterminer une équation cartésienne du plan P qui contient les droites D et D'

b) Déterminer un système d'équations paramétriques de la perpendiculaire commune aux droites: D et D'

c) Montrer que les droites: D et $D'=(A'(-3;-1;4); \vec{u}'(-2;1;-5))$ sont sécantes

d) Déterminer un système d'équations paramétriques de la perpendiculaire commune aux droites: D et D'

4) On considère les droites $D=(A(1; -1; 0); \vec{u}(0; -1; 1))$ et $D'=(A'(0; 1; 0); \vec{u}'(-1; -1; 2))$

a) Déterminer une équation cartésienne du plan P qui contient la droite D et la droite $(A; \vec{u} \wedge \vec{u}')$

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P' qui contient la droite D' et la droite $(A'; \vec{u} \wedge \vec{u}')$

c) On considère la droite Δ qui est la droite d'intersection des plans P et P'

i) Déterminer le point H d'intersection de D et Δ

ii) Déterminer le point H' d'intersection de D' et Δ

iii) Vérifier que la droite (HH') est perpendiculaire à D et à D'

iv) Que représente la droite Δ ?

5)a) Calculer l'aire du parallélogramme: $A(2;-1;3)B(-2;1;0)C(0;1;1)D$

b) Calculer l'aire du triangle: $A(-1;0;3)B(-3;0;-1)C(-3;3;2)$

IV) Distance d'un point M à une droite $D = (A; \vec{u})$:

1) Préliminaires:

a) Dessiner en perspective:

i) Une droite $D = (A; \vec{u})$

ii) Un point M n'appartenant pas à D

iii) H le projeté orthogonal de M sur D

b) **Remarques:** i) H est le point d'intersection de D et

ii) La distance de M à D est la distance de M à _____ ; $d(M;D) = \text{_____} = \text{_____}$

2a) Exprimer: $\left\| \vec{AM} \wedge \vec{u} \right\|$ en fonction de: $\left\| \vec{HM} \right\|$ et de $\|\vec{u}\|$

b) Exprimer: $\left\| \vec{HM} \right\|$ en fonction de: $\left\| \vec{AM} \wedge \vec{u} \right\|$ et de $\|\vec{u}\|$

On retiendra: La distance du point M à la droite $D=(A;\vec{u})$ est: $d(M;D) = \text{_____}$

3) Exercices: E est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer $d(M;D)$

i) $M(1;-2;3)$; $D=(A(-1;-2;1); \vec{u}(0;3;4))$ ii) $M(-1;0;2)$; $D: \begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 - k \quad (k \in \mathbf{R}) \\ z = 3k \end{cases}$ iii) $M(1;-1;0)$; $D: \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$