

Logarithme népérien

Théorème sur les limites du logarithme népérien en 0 et $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Conséquence graphique : l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe représentant \ln .

La preuve de ce théorème

① La limite de \ln en $+\infty$

Soit M un réel strictement positif.

Comme la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que $\ln(1) = 0$ alors

$\ln(2)$ est un réel strictement positif.

Par conséquent, le quotient $\frac{M}{\ln(2)}$ est un réel strictement positif.

On appelle n le plus petit entier naturel tel que :

$$n \geq \frac{M}{\ln(2)} \Leftrightarrow \underbrace{n \times \ln(2)}_{\substack{\text{On multiplie par } \ln(2) \\ \text{qui est positif.}}} \geq M \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq M$$

Comme \ln est une fonction croissante, alors pour tout $x \geq 2^n$ nous avons :

$$\ln(x) \geq \ln(2^n) \geq M$$

Conclusion : nous venons d'établir que pour tout réel strictement positif M , il existe un moment $x_0 = 2^n$ à partir duquel $\ln(x) \geq M$.

C'est la définition d'une limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

② La limite de \ln à droite de 0

Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, nous pouvons écrire :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Quand x tend vers 0 par la droite, $\frac{1}{x}$ tend vers $\frac{1}{0^+} = +\infty$. Donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$

d'après ce qui précède.

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Théorème sur les croissances comparées de ln et x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0$$

En d'autres termes, ln est la plus faible de toutes les fonctions connues en terminale.

La preuve de ce théorème

① La limite de ln(x)/x en +∞

Le quotient $\frac{\ln(x)}{x}$ est en +∞ une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour lever cette indétermination, étudions la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$$

D'abord, calculons l'image de 1 par f.

$$f(1) = \ln(1) - 2\sqrt{1} = 0 - 2 = -2$$

Ensuite les fonctions ln et racine étant dérivables sur $]0; +\infty[$, elles le sont de facto aussi sur $[1; +\infty[$. Donc leur différence f l'est également.

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, il vient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\ln(x)]' - 2 \cdot [\sqrt{x}]' \\ &= \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

Or si $x > 1$ alors $\sqrt{x} > \sqrt{1} = 1$
La racine est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

donc $1 - \sqrt{x} < 0$.

Le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et de variation de f est donc celui ci-contre.

x	1	+∞
$1 - \sqrt{x}$	-	
x		+
$f'(x)$	-	
	-2	
f	↘	?

La fonction f décroissant depuis -2, elle est donc négative sur l'intervalle sur $[1; +\infty[$.

Ainsi pour tout $x \in [1; +\infty[$, avons-nous :

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 2\sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{\ln}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

On divise par $x \in [1; +\infty[$ qui est positif. L'ordre est conservé

De plus sur l'intervalle $]1; +\infty[$, $\frac{\ln(x)}{x}$ est positif car c'est le quotient de deux quantités positives. Ce même quotient est nul lorsque x vaut 1 car $\frac{\ln(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0$.

Autrement dit, nous venons d'établir que pour tout réel $x \in]1; +\infty[$, nous avons :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Or lorsque x tend vers $+\infty$, \sqrt{x} s'en va vers $+\infty$ donc $\frac{2}{\sqrt{x}}$ tend vers $\frac{2}{+\infty} = 0^+$.

Ainsi au voisinage de $+\infty$, le quotient $\frac{\ln(x)}{x}$ est-il coincé entre 0 et la quantité $\frac{2}{\sqrt{x}}$ qui y va.

Conclusion : en application du théorème des gendarmes, nous pouvons conclure :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

② La limite de $x \cdot \ln(x)$ à droite de 0

Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, nous pouvons écrire :

$$x \cdot \ln(x) = \frac{1}{1/x} \times [-\ln(1/x)] = -\frac{\ln(1/x)}{1/x}$$

Quand x tend vers 0 par la droite, $1/x$ tend vers $\frac{1}{0^+} = +\infty$.

Or d'après ce qui précède $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ avec ici $t = 1/x$.

Donc $\frac{\ln(1/x)}{1/x}$ tend vers 0.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(1/x)}{1/x} = 0$

