# Arithmétique

**$4^{ème}$ Maths**

**Exercice N°1 :**

1) Démontrer que $115 \equiv 27[11]$ et que $-39 \equiv 27[11]$
2) Trouver un entier naturel $n$ inférieur à $100$ qui vérifie : $\begin{cases} n \equiv 27[11] \\ n \equiv 4[7] \end{cases}$
3) Combien d'entiers naturels inférieurs à $1000$ sont congrus à 27 modulo $11$?

**Exercice N°2 :**

A l'aide des congruences, quel est le dernier chiffre dans l'écriture décimale de $3^{2015}$ ?

**Exercice N°3 :**

On considère l'équation (E) : $x^2 - 7y^2 = 3$ où x et y sont deux entiers relatifs.

1) Justifier que si le couple d'entiers (x ; y) est solution alors $x^2 \equiv 3[7]$.

2) Déterminer les restes possibles de la division de $x^2$ par 7.

3) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution

**Exercice N°4 :**

Démontrer que $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5 quel que soit l'entier naturel $n$

**Exercice N°5 :**

**On admet le critère de divisibilité par 7 suivant :**

Pour savoir si un entier naturel n est divisible par 7, on sépare le chiffre des unités de n des autres chiffres et on effectue la différence entre le nombre formé par les autres chiffres et le double du chiffre des unités. L'entier n est divisible par 7, si et seulement si, cette différence est divisible par 7.

1-A l'aide de ce critère, déterminer si 4361 est divisible par 7. Même question avec 542.

**Professeur Mr Kamel Bel Asri**

Dans la suite de l'exercice, on propose de démontrer ce critère pour un nombre formé de trois chiffres.

Soit n un entier naturel de trois chiffres dont l'écriture décimale est n=**abc**avec $a \in \mathbb{N}^*; b, c \in \mathbb{N}$.

2-Montrer que $n \equiv 2a+3b+c[7]$.

3-On appelle m l'entier égal à la différence décrite dans le critère.

a- Montrer que $m \equiv 3a+b-2c[7]$.

b- En déduire que $n-3m \equiv 0[7]$ et $m+2n \equiv 0[7]$.

c-En déduire que $m \equiv 0[7]$ si et seulement si $n \equiv 0[7]$ puis conclure.

**<u>Exercice N°6 :</u>**

On considère la suite numérique (un) définie par $u_0=14$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=5u_n-6$.

1-Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

2-Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de la suite $u_n$?

3-Montrer que pour tout entier n, $u_{n+2} \equiv u_n[4]$.

4-En déduire que, pour tout entier naturel k, $u_{2k+1} \equiv 0[4]$ et $u_{2k} \equiv 2[4]$.

5-Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n=5^{n+2}+3$.

6-Montrer que, pour tout entier naturel n, $5^{n+2} \equiv 25[100]$.

7-En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28[100]$.

7-Déterminer les deux derniers chiffres dans l'écriture décimale de $u_n$.