BARYCENTRE DEUX POINTS

1) BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDERES

On appelle point pondéré tout couple (A‹a) où A est un point et a un réel

A) DEFINITION

PROPRIETE

Soit A et B deux points du plan , a et b deux réels tels que **a + b ≠ 0 .**

Il existe un unique point G vérifiant : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

DEFINITION

Ce point G est appelé **barycentre** du système (A , a) ; (B , b) .

On dit aussi que G est le barycentre **des points pondérés** ou **des points massifs** (A , a) et (B , b) .

· *a et b peuvent être négatifs*

· *Dans la pratique on dit :*

« G barycentre de (A , a) , (B , b) »

preuve :

On a : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ (d'après la relation de Chasles)

$\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ car a + b ≠ 0

Ainsi chercher un point G tel que a $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ c'est chercher un point G tel que

$\mathbf{\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}$

Or, si a + b ≠ 0 , il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$; on en déduit le résultat.

Rem : Pour la construction du barycentre, on utilise le fait que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

Ex: Construire les barycentres suivants :

G1 barycentre de (A , 1) , (B , 1)

G2 barycentre de (C , – 3) , (D , – 2)

G3 barycentre de(E , 4) , (F , -2)

B) PROPRIETES (Dans la suite on suppose a + b ≠ 0)

- **HOMOGENEITE**

Si G est le barycentre de (A , a) , (B , b) alors pour tout réel k non nul, G est le barycentre de (A , k a) , (B , k b).

preuve :

Pour k ≠ 0 , on a : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow k(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow ka\overrightarrow{GA} + kb\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

k a + k b ≠ 0 ; G est donc aussi le barycentre de (A, k a), (B , k b)

Ex : - G1 est aussi le barycentre de (A, 3), (B , 3)

- G2 est aussi le barycentre de (C, 9), (D, 6)

- G3 est aussi le barycentre de (E, – 4) , (F , 2)

• POSITION DU BARYCENTRE

Si G est le barycentre de (A , a) , (B , b) , alors G est situé sur la droite (AB)

Et réciproquement : tout point de (AB) est barycentre de A et B affectés de coefficients bien déterminés

Si a + b = 0 , alors il n'y a pas de barycentre.

Preuve :

$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$, ainsi $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ donc G est situé sur (AB)

Rem : Si a = b ≠ 0 G est appelé **isobarycentre** de A et de B .

L'isobarycentre des deux points A et B est aussi le milieu du segment [AB] .

En regardant d'un peu plus près …

	Idée de Preuve
Si le coefficient de A est nul, alors G et B sont confondus. (de même pour B)	On a , $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ or a = 0 donc $b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ sig $\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ sig B = G
Si a et b sont de même signe alors G ∊ [AB]	On peut supposer a et b positif. Ainsi $0 < \frac{b}{a+b} < 1$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$
Si a et b sont de signe contraire alors G appartient à la droite (AB) privé du segment [AB]. .	On peut supposer a < 0 et b > 0 . Deux cas se présentent • a + b < 0 ainsi $\frac{b}{a+b} < 0$ • a + b > 0 , or a + b < b , $\frac{b}{a+b} > 1$ On déduit le résultat de $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$
Si │a │ > │ b │, alors G est « plus près » de A que de B.	On a , $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ sig $a\overrightarrow{GA} = - b\overrightarrow{GB}$ $\lvert a\rvert$GA= $\lvert b\rvert$GB c'est à dire $\frac{GA}{GB} = \frac{\lvert b\rvert}{\lvert a\rvert}$

• PROPRIETE FONDAMENTALE

Si G est le barycentre de (A, a), (B, b), alors pour tout point M du plan :

$\mathbf{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\,\overrightarrow{MG}}$

Preuve:

On a, $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

.Donc pour tout point M du plan, on a : $a\overrightarrow{GM} + a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{GM} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$(Chasles)

$\Leftrightarrow (a + b)\overrightarrow{GM} + a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$

Rem:

- Si on considère le milieu I de [AB] , on retrouve une formule vue en 1ère année :

Pour tout point M du plan …$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$

- Si M et A sont confondus, on retrouve : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

  si M et B sont confondus … on retrouve : $\overrightarrow{BG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{BA}$

  Un choix judicieux de M, permet une construction facile de G .

C) COORDONNEES DU BARYCENTRE DE DEUX POINTS

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
Soit A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) deux points du plan.
Le barycentre G de (A, a), (B, b) a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{1}{a+b}(a x_A + b x_B) \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{a+b}(a y_A + b y_B)$$

G a pour abscisse la moyenne pondérée des abscisses de A et B et pour ordonnée la moyenne pondérée des ordonnées de A et B .

Preuve :

On a vu que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b}(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB})$

Pour O en particulier, on a: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b}(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB})$

$= \frac{1}{a+b}(a(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) + b(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}))$

$= \frac{1}{a+b}((ax_A + b x_B)\vec{i} + \frac{1}{a+b}(ay_A + by_B)\vec{j})$

Ex:

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on a , A (-1 ; -3) et B (2 ; 2) .
Placer le point G barycentre de (A , 1) , (B , 3)

2) BARYCENTRE DE 3 POINTS PONDERES ET PLUS …

A) DEFINITION

L'étude faite au paragraphe précédent se généralise à trois points pondérés, quatre points ou plus.
Nous n'énoncerons la définition et les propriétés que dans le cas de trois points pondérés

PROPRIETE :

Soit A , B et C trois points du plan , a , b et c trois réels tels que **a + b + c ≠ 0** .
Il existe un unique point G vérifiant : $\mathbf{a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}}$

DEFINITION:

Ce point G est appelé **barycentre** de (A , a) , (B , b) , (C , c) .
Il est donné par $\mathbf{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{a+b+c}(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})}$

Comme dans le cas de deux points pondérés :

- **HOMOGENEITE:**

Le barycentre ne change pas lorsqu'on multiplie les coefficients par un même nombre non nul

- **ISOBARYCENTRE :**

Si a = b = c (≠ 0) , G est encore appelé **isobarycentre** de A , B et C .
On verra en exercice que si A , B et C ne sont pas alignés alors l'isobarycentre de A , B et C est le centre de gravité du triangle ABC

- **PROPRIETE FONDAMENTALE :**

Après quelques calculs, on montre que pour tout point M du plan :

$$\mathbf{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\,\overrightarrow{MG}}$$

Ce qui nous permet de construire G en choisissant judicieusement M. (M = A , M = B , M =C)

- **COORDONNEES :**

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on déduit facilement de la formule ci-dessus les coordonnées de G .
En prenant M = O

$x_G = \frac{1}{a+b+c}(a\,x_A + b\,x_B + c\,x_c)$ et $y_G = \frac{1}{a+b+c}(a\,y_A + b\,y_B + c\,y_c)$

Rem :

Si l'un des coefficient est nul (par exemple c) , alors G est le barycentre des deux points pondérés (A , a) , (B , b)

B) BARYCENTRE PARTIEL

on suppose $a + b + c \neq 0$

Si on remplace deux points pondérés (A , a) et (B , b) (avec $a + b \neq 0$) par leur barycentre H affecté du coefficient a + b , alors
le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c) est aussi le barycentre de (C , c) , (H , a + b) .

Preuve:

Soit H le barycentre de (A , a) , (B , b) .
On a alors $a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} = \vec{0}$
Soit G le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c) .
On a alors $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow a\overrightarrow{GH} + a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{GH} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{GH} + a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{GH} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
On en déduit que G est le barycentre de (C, c), (H, a + b).

Mais ... quel intérêt ?

Cette propriété permet de ramener la construction du barycentre de trois points (ou plus) , à la construction (connue j'espère) du barycentre de deux points.