

I – Définition

Une fonction définie sur un intervalle associe à chaque nombre de cet intervalle un nombre réel et un seul.

Notation: $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x)$

soit $x_0 \in I$, le réel $y_0 = f(x_0)$ est l'image de x_0 par f ,
on dit que x_0 est un antécédant de y_0 par f

Exemples :

$$1) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 2x$$

$$2) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$3) h: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

Déterminer les ensembles des définitions des fonctions f , g et h

1) f est dite fonction polynôme est définie pour tout \mathbb{R}

2) g est dite fonction rationnelle don composée de deux fonctions

$x \mapsto x$ définie pour tout \mathbb{R} et $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$ qui n'est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
car $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

3) On a $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$ qui s'annule pour les valeurs $x = 1$ et $x = -1 \notin [0, +\infty[$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	0	1	$+\infty$
$sig(1 - x)$	+	-	-
$sig(1 + x)$	+	+	+
$sig(1 - x^2)$	+	-	-

On conclut donc que h est définie pour tout $x \in [0, 1]$

II – Représentation graphique d'une fonction

Définition : Le plan est muni d'un repère (o, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f une fonction définie sur un ensemble I . On appelle représentation graphique de f ou courbe représentative de f l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$, où x appartient à I

Vocabulaire : Si une fonction f , définie sur un ensemble I , a pour représentation graphique la courbe C , on dit que C a pour équation $y = f(x)$, avec $x \in I$

Exemples :

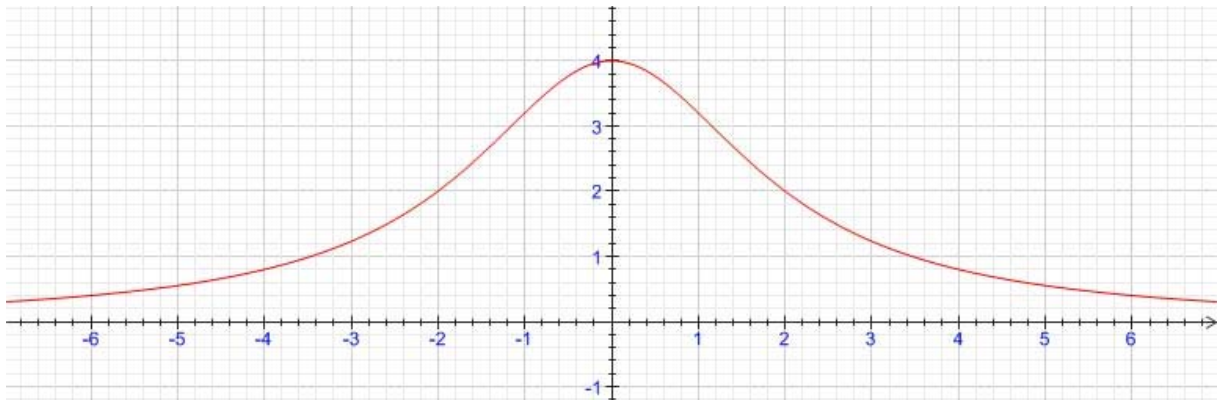
1) La courbe représentative C d'une fonction f définie sur \mathbb{R} a pour équation :
 $y = x^2 - 2x + 3$. M est le point de C d'abscisse 1. Quelle est son ordonnée ?

$$M(1, f(1)) \text{ donc } f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 4 - 2 = 2 \text{ donc } f(1) = 2$$

2) Soit f la fonction définie par $f: x \mapsto \frac{16}{x^2 + 4}$

Pour tracer sa représentation graphique, on calcule les images de quelques valeurs puis on place les points correspondants dans le repère. On relie ensuite ces points par une courbe.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0,4	0,55	0,8	1,23	2	3,2	4	3,2	2	1,23	0,8	0,55	0,4



III – Maximum et minimum

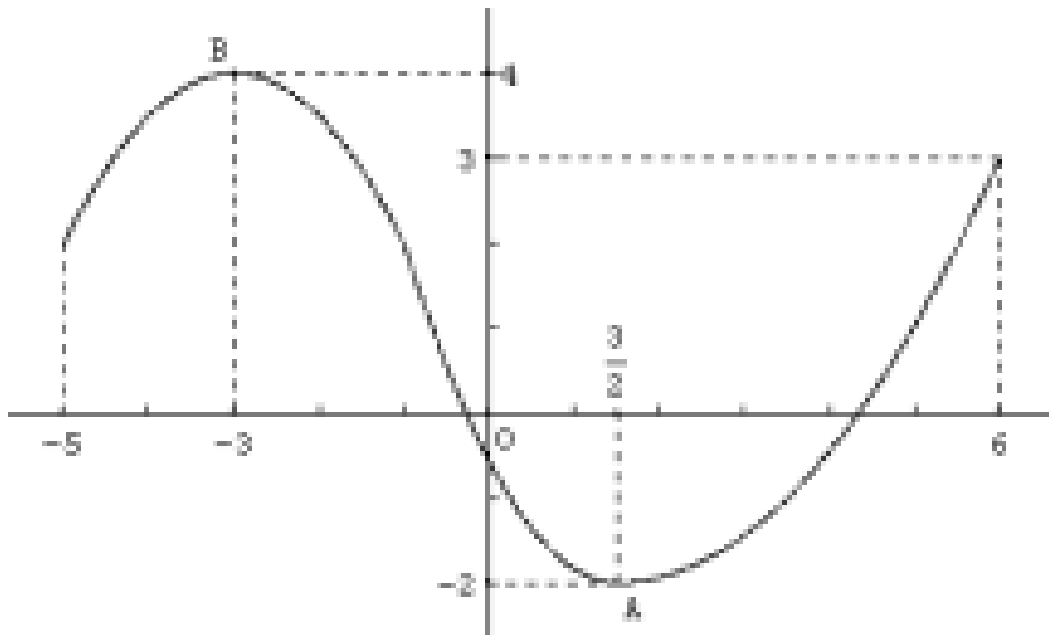
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I .

- La fonction f admet un minimum en a sur l'intervalle I , lorsque : Pour tout réel x de I , $f(x) \geq f(a)$. Le réel $f(a)$ est le minimum de f sur I .
- La fonction f admet un maximum en a sur l'intervalle I , lorsque : Pour tout réel x de I , $f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est le maximum de f sur I .

Exemple :

Le minimum sur l'intervalle $[-5 ; 6]$ de la fonction f représentée ci-dessous est -2 . Il est obtenu lorsque $x = \frac{3}{2}$. En effet, A est le point le plus « bas » de la courbe.

Le maximum sur l'intervalle $[-5 ; 6]$ est 4 . Il est obtenu lorsque $x = -3$. En effet, B est le point le plus « haut » de la courbe.



IV – Sens de variations d’une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble E et I un intervalle inclus dans E .

- La fonction f est croissante sur l’intervalle I si, pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \leq f(b)$.
- La fonction f est décroissante sur l’intervalle I si, pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \geq f(b)$.
- La fonction f est constante sur l’intervalle I si, pour tous réels a et b de I , $f(a) = f(b)$.

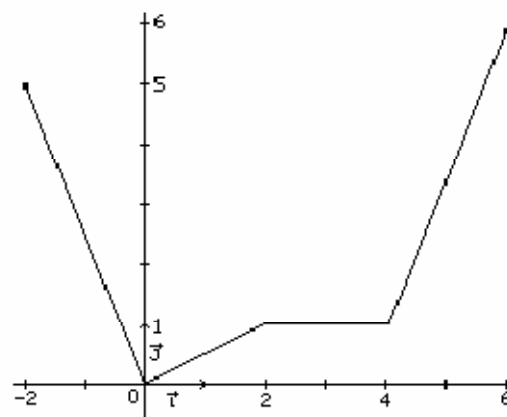
Vocabulaire : Une fonction est dite monotone sur un intervalle I , Si elle est croissante sur I ou décroissante sur I .

Exemples :

- La fonction f définie sur $[-2,6]$ par sa courbe
- Le sens de variation de f est tel que :
 - Décroissante sur $[-2,0]$
 - Croissante sur $[0,2]$
 - Constante sur $[2,4]$
 - Croissante sur $[4,6]$
- Le tableau de variation de f

x	-2	0	2	4	6
$f(x)$	5	0	1	1	6

Diagramme de variation montrant des flèches indiquant la direction de la fonction : décroissante de 5 à 0, croissante de 0 à 1, constante à 1, et croissante de 1 à 6.



V – Parité et symétrie

Définition : Soit f une fonction définie sur I .

- On dit que f est paire si, pour tout réel x de I , on a $-x \in I$ et $f(-x) = f(x)$. Alors, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées.
- On dit que f est impaire si, pour tout réel x de I , on a $-x \in I$ et $f(-x) = -f(x)$. Alors, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l’origine du repère.

Exemples :

Soient les trois fonctions f , g et h

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 4$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3 - 3$$

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$ donc f est une fonction paire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées. (voir fig 1)

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ donc g est une fonction impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. (voir fig 2)
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = (-x)^3 - 3 = -x^3 - 3$ donc h est une fonction quelconque. (voir fig 3)

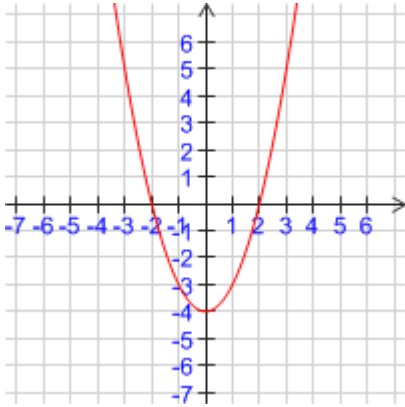


Fig 1

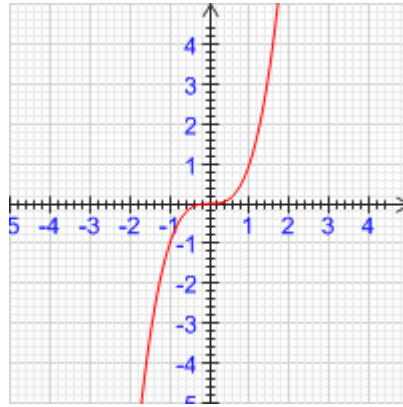


fig 2

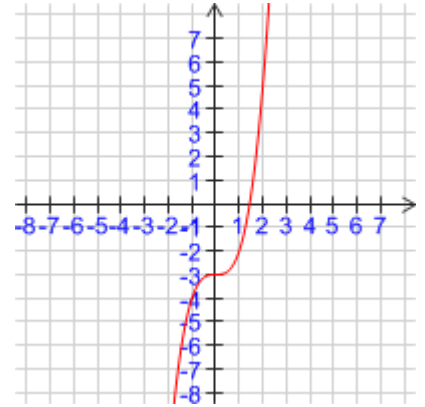


fig 3

MR HAMADA