➢ COURS FONCTIONS 2SC

Mr Y.BOULILA

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité: 1 cm , sauf précision contraire)

I) Introduction:

1) Exercice: 1) Compléter le tableau de valeurs:

x	- 2	- 1	0	1	2
$-2x+1$					
$x^5 - 5x^3 + 2x + 1$					

2)a) Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les graphes des fonctions:

$f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = x^5 - 5x^3 + 2x + 1$

b) Calculer $f(3)$ et $g(3)$, conclusion ?

2) Conclusion: En **Mathématiques** , pour construire correctement le graphe d'une fonction,

II) Sens de variation d'une fonction sur un intervalle I , où elle est définie :

1) Exercice: Soient les fonctions: $f(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$ et $g(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

1)a) Déterminer les deux intervalles I et I' , sur lesquels f est définie (de même pour g)

b)i) Démontrer que pour tous réels: a et b de I

Si $a < b$ Alors $f(a) < f(b)$ et $g(a) > g(b)$

ii) Que peut-on démontrer si a et b sont deux réels de I' tels que: $a < b$?

iii) Dresser le tableau de variation de f et g sur **R**

Vocabulaire: « La fonction f est sur »

« La fonction f est sur »

« La fonction g est sur »

« La fonction g est sur »

c)i) Démontrer que pour tous réels: a et b de I ($a \neq b$)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \frac{g(a)-g(b)}{a-b} < 0$$

ii) Que peut-on démontrer si a et b sont deux réels de I' ?

iii) Interpréter graphiquement le 1)c)i) . Remarque ?

2) Taux d'accroissement d'une fonction. Dans toute la suite on supposera que: $a \neq b$

a) Définition: I est un intervalle sur lequel la fonction f est définie ($I \subset D_f$)

Pour tous réels a et b de I ,

on appelle taux d'accroissement de f entre a et b , le réel noté: $\tau_{(a,b)}$ défini par:

$$\tau_{(a,b)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

b) Interprétation géométrique: Soit f une fonction définie sur I

Les points A(a ; f(a)) et B(b ; f(b)) sont des points

$\tau_{(a,b)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est

c) Propriétés: **i)** Si f est croissante sur I

Alors: pour tous réels a et b de I : *) si $a < b$ alors:

*) si $a > b$ alors:

Alors: pour tous réels a et b de I : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ii) Si pour tous réels a et b de I : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Alors: pour tous réels a et b de I : *) si $a < b$ alors

*) si $a > b$ alors

Alors:

On retiendra: f est une fonction définie sur un intervalle I de **R**

f est croissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tous réels a et b de I : $\tau_{(a,b)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

f est décroissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tous réels a et b de I : $\tau_{(a,b)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

d) Exercice: $m \neq 0$; p ; $k \neq 0$; $\alpha \neq 0$; β ; γ , sont des paramètres réels

1)a) Déterminer D_f , le domaine de définition de f

b) (a et b appartenant à un même intervalle inclus dans D_f)

Déterminer l'expression en fonction de a et b ,

du taux d'accroissement de f entre a et b

2) Déduire de 1) le tableau de variation des fonctions:

i) $f(x) = 2x + p$	ii) $f(x) = -3x + p$	iii) $f(x) = mx + p$
iv) $f(x) = 3x^2$	v) $f(x) = -2x^2$	vi) $f(x) = kx^2$
vii) $f(x) = \frac{k}{x}$	viii) $f(x) = \frac{k}{x-3}$	ix) $f(x) = \frac{k}{mx+p}$
x) $f(x) = x^2 + 2x - 3$	xi) $f(x) = -3x^2 + 4x - 5$	xii) $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

e) Notion de: « nombre dérivé » d'une fonction f en a (a est un réel de I)

1) Exemple: $f(x) = x^2$

i) On fixe $a = 1$, $\tau_{(1,b)} =$ = =

$\tau_{(1,b)}$ est le de la droite (AB) avec A(;) et B(;)

Par exemple avec: b = 2 ; b = 1,5 ; b = 0 ; b = 0,5

ii) On donne à b des valeurs « de plus en plus proches » de a = 1

Les droites (AB) tendent vers la

$\tau_{(1,b)}$ prend alors des valeurs « de plus en plus proches de »

qui est le coefficient directeur de

iii) Vocabulaire: 2 est appelé

2) Exemple: $f(x) = x^5 - 5x^3 + 2x + 1$

a)i) On fixe $a = 0$, $\tau_{(0,b)} =$ = =

$\tau_{(0,b)}$ est le de la droite (AB) , avec A(;) et B(;)

Par exemple avec: b = 1 ; b = 0,5

ii) On donne à b des valeurs « de plus en plus proches » de a = 0

Les droites (AB) tendent vers la

$\tau_{(0,b)}$ prend alors des valeurs de plus en plus proches de , qui est le coefficient directeur de

Vérification avec une calculatrice graphique

iii) Vocabulaire: 2 est appelé

b)i) On fixe $a = 1$, $\tau_{(1,b)} =$

$\tau_{(1,b)}$ est le de la droite (AB) , avec A(;) et B(;)

Par exemple avec: b = 0 ; b = 2

ii) On donne à b des valeurs « de plus en plus proches » de a = 1

Les droites (AB) tendent vers la

$\tau_{(1,b)}$ prend alors des valeurs de plus en plus proches de , qui est le coefficient directeur de

Vérification avec une calculatrice graphique

iii) Vocabulaire: - 8 est appelé

III) Autres exemples de fonctions :

A) Fonctions du type: $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$ $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

1) Tableau de variation de $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$ $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

a) Exemples: 1) $f(x) = \sqrt{2x - 7}$

a) Pour quelles valeurs de x peut-on calculer f(x) ?

On dit que f est définie pour tous les réels
On dit que le domaine de définition de f est: $D_f =$

b) Pour tous réels a et b de D_f : $\tau_{(a\,;\,b)} =$

$\tau_{(a\,;\,b)} =$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) $f(x) = \sqrt{-3x+1}$
Mêmes questions que ci-dessus

2) Cas général : $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$

a) Domaine de définition : $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$

b) Taux d'accroissement de f entre a et b :

Pour tous réels a et b de D_f : $\tau_{(a\,;\,b)} =$

c) Tableau de variation :

On retiendra:

1[er] cas:

x	
$f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$	

2[ième] cas:

x	
$f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$	

3) Graphe de $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$:

a) Exemples: Déterminer D_f , dresser le tableau de variation de f , dresser un tableau de valeurs, puis construire le graphe de f

i) $f(x) = \sqrt{x}$ ii) $f(x) = \sqrt{x-3}$ iii) $f(x) = \sqrt{-x-1}$ iv) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x+3}$ v) $f(x) = \sqrt{-2x+5}$

b) Exercices: 1) On considère la fonction: $f(x) = \sqrt{9-2x}$
a) Déterminer les points d'intersection du graphe de f et des axes de coordonnées
b) Construire le graphe de f
c) Résoudre algébriquement, puis vérifier graphiquement les équations:
i) $f(x) = \sqrt{5}$ ii) $f(x) = 2{,}5$ iii) $f(x) = -1$ iv) $f(x) = 2x - 3$ v) $f(x) = -x + 5$

2)a) Résoudre algébriquement, puis vérifier avec une calculatrice graphique:

i) $\sqrt{x} \geq x$ ii) $\sqrt{x-2} \leq x - 2$

iii) $\sqrt{2x-5} < \sqrt{x-2}$ iv) $\sqrt{7x+15} < \sqrt{-2x+3}$

b) Dresser le tableau de signes de: $\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} - \dfrac{1}{x-2}$

IV) Fonctions homographiques:

($c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

1) Fonction $f(x) = \dfrac{k}{x}$, (k réel non nul fixé) :

$D_f =$

a) Pour tout x de D_f , $f(-x) =$ donc f est une fonction impaire

donc le graphe de f est

On étudie le sens de variation de f sur

On en déduit par symétrie le sens de variation de f sur

b) Asymptotes :

i) *) Lorsque x tend vers: $+\infty$, f(x) tend vers:

*) La droite d'équation (axe) est une asymptote « horizontale » au graphe de f

ii) *) Lorsque x tend vers: 0^+ , f(x) tend vers:

*) La droite d'équation (axe) est une asymptote « verticale » au graphe de f

On retiendra:

1^{er}cas:

x	
$f(x) = \dfrac{k}{x}$	

$2^{ième}$cas:

x	
$f(x) = \dfrac{k}{x}$	

Asymptotes:

c) Exemples : Construire (sans tableau de valeurs) le graphe de f

i) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ ii) $f(x) = -\dfrac{3}{2x}$

2) Cas général: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (a ; b ; c et d sont des réels tels que: $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$) :

a) Exemples : 1) $f(x) = \dfrac{2x-2}{x+3}$ les graphes des fonctions: f ; g sont notés: G_f ; G_g

a) Déterminer D_f

b)i) Déterminer par « identification des polynômes » les réels β et k tels que:

Pour tout réel x de D_f : $\dfrac{2x-2}{x+3} = \beta + \dfrac{k}{x+3}$

ii) Même question en effectuant la division euclidienne de: $2x - 2$ par $x + 3$

c) Soit $g(x) = -\dfrac{8}{x}$

i) Démontrer que: $M(x;y)$ appartient à G_f $\Leftrightarrow$ $N(x + 3 ; y - 2)$ appartient à G_g

ii)*) Montrer que M est l'image de N par une translation $t_{\vec{u}}$

**) Que peut-on en déduire pour G_f et G_g ?

iii)*) Construire G_f

**) Donner les équations des asymptotes de G_f et les coordonnées du centre de symétrie de G_f

2) $f(x) = \dfrac{-6x+27}{8x-20}$ les graphes des fonctions: f ; g sont notés: G_f ; G_g

a) Déterminer D_f

b) Déterminer par division euclidienne les réels β et k tels que:

Pour tout réel x de D_f : $\dfrac{-6x+27}{8x-20} = \beta + \dfrac{k}{x-\frac{5}{2}}$

c) Soit $g(x) = \dfrac{3}{2x}$

i) Démontrer que: $M(x;y)$ appartient à G_f $\Leftrightarrow$ $N\left(x - \dfrac{5}{2} ; y + \dfrac{3}{4}\right)$ appartient à G_g

ii)*) Montrer que M est l'image de N par une translation $t_{\vec{u}}$

**) Que peut-on en déduire pour G_f et G_g ?

iii)*) Donner les coordonnées du centre de symétrie de G_f et les équations des asymptotes de G_f

**) Construire G_f

b) Cas général: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$) :

a) Déterminer D_f

b) Exprimer en fonction de a ; b ; c et d , les réels β et k tels que:

Pour tout réel x de D_f : $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \beta + \dfrac{k}{x+\frac{d}{c}}$

c) Soit $g(x) = \dfrac{bc-ad}{c^2x}$

i) Démontrer que: $M(x;y)$ appartient à G_f $\Leftrightarrow$ $N\left(x + \dfrac{d}{c} ; y - \dfrac{a}{c}\right)$ appartient à G_g

ii)*) Montrer que M est l'image de N par une translation $t_{\vec{u}}$

**) Que peut-on en déduire pour G_f et G_g ?

iii) Donner les coordonnées du centre de symétrie et les équations des asymptotes de G_f

iv) Pour construire G_f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on construit G_g , dans le repère

$(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

On retiendra: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0)$ $D_f =$

G_f est l'hyperbole d'équation: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, dont les asymptotes sont les droites:

Le centre de symétrie de G_f est $\Omega($; $)$

c) Remarque: On peut construire une hyperbole en utilisant la méthode décrite au **IV)2)b)** ou connaissant sa forme générale, utiliser quelques points bien choisis

d) Exemples: Déterminer: D_f ; les asymptotes à G_f ; le centre de symétrie de G_f
Puis construire G_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en déduire le tableau de variation de f

i) $f(x) = \dfrac{-3x+10}{x-4}$ ii) $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-3}$ iii) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{3x+1}$ iv) $f(x) = \dfrac{4x-7}{2-3x}$

e) Exercices: 1)a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ Déterminer: D_f ; les asymptotes à G_f ; le centre de symétrie de G_f
Puis construire G_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) Résoudre graphiquement, puis algébriquement les inéquations:
i) $\dfrac{2x-3}{x-1} \geq -x+3$ ii) $\dfrac{2x-3}{x-1} \geq x+1$ iii) $\dfrac{2x-3}{x-1} \geq \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$

2)a) Déterminer des réels a ; b ; c et d tels que l'hyperbole H : $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
admette pour asymptote la droite d'équation: $y = 2$
et passe par les points: $A(2 ; 1)$ et $B(0,5 ; -2)$

b)i) Construire H dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
ii) Construire le graphe de la fonction $f(x) = \left|2 - \dfrac{2}{x}\right|$, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

c)i) Construire la parabole P : $y = -x^2 - 2x + 3$, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
ii) Résoudre graphiquement puis algébriquement:
*) $2 - \dfrac{2}{x} = -x^2 - 2x + 3$ **) $2 - \dfrac{2}{x} \geq -x^2 - 2x + 3$