Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 1** *Mathématiques*	*Niveau : 3 ème Math*
Date : 03 / 01 / 2017	*Prof : MEDDEB Tarek*	*Durée : 2 heures*

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} \left|x^2-4\right|+x+1 & si\ x\le 1 \\ 5+\sqrt{x^2+3x-4} & si\ x>1 \end{cases}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que f est continue sur IR.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x>1$, $\sqrt{x^2+3x-4}-x=\dfrac{3-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}+1}$.

$b/$ En déduire que la droite $\Delta : y=x+\dfrac{13}{2}$ est une asymptote de $\mathscr{C}_f$.

3) $a/$ Etudier la dérivabilité de f en (-2).

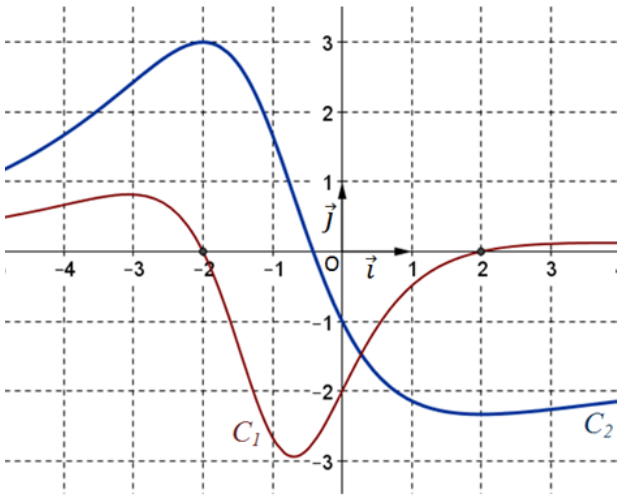
$b/$ Donner une approximation affine de $f(-1{,}98)$.

4) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice n°2 : (4 pts)

Dans la figure ci-contre, C_1 et C_2 sont les courbes représentatives, dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'une fonction f dérivable sur IR et de sa fonction dérivé $f\,'$.

On utilisera le graphique comme source des données.



1) Justifier que C_2 est la courbe de f.

2) $a/$ Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}$, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-3}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x\,f(x)+6}{x+2}$.

$b/$ Ecrire une équation de la tangente à C_2 au point d'abscisse 0.

3) On suppose que, pour tout $x\in IR$, $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+2x+4}+b$.

$a/$ Montrer que : $a=-8$ et $b=-1$.

$b/$ Dresser le tableau de variations de f.

Exercice n°3 : (5 pts)

1) Montrer que, pour tout $x \in IR$, on a : $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

2) On pose $P(t) = 8t^2 - 8t + 1$.

$a/$ Montrer que $P\left(\cos^2 \frac{\pi}{8}\right) = 0$ et que $P\left(\cos^2 \frac{3\pi}{8}\right) = 0$.

$b/$ Résoudre dans IR l'équation : $P(t) = 0$.

$c/$ En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8}$.

3) On pose , pour tout $x \in IR$, $F(x) = \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos x + \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin x$.

$a/$ Montrer que $F(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$.

$b/$ Résoudre dans IR puis dans $[0\ ;\ 2\pi]$ l'équation : $F(x) = 1$.

Exercice n°4 : (5 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. *(voir figure sur la feuille annexe que l'on compétera au fur et a mesure).*

Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures de ce triangle. P et Q sont les points qui appartiennent respectivement aux demi-droites $[CA)$ et $[BA)$ tels que $CP = BQ = BC$.

1) $a/$ Montrer que la droite (CI) est la médiatrice du segment $[BP]$ et que la droite (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$.

$b/$ Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CP};\overrightarrow{QB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

2) $a/$ Montrer qu'il existe une rotation r qui transforme C en Q et P en B.

$b/$ Déterminer le centre et l'angle de r.

3) $a/$ Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IC}})\ [2\pi]$.

$b/$ En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IB}}) + 2\,(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}}) \equiv 0[2\pi]$.

$c/$ Montrer alors que $(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}}) = \frac{2\pi}{3} + k\pi.\ \ k \in \mathbb{Z}$

$d/$ En déduire que les points I, P et Q sont alignés.

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synthèse n°1 *(03 – 01 – 2017)*

Nom et prénom :…………………………………………………........................ *Classe : 3 ème Math*