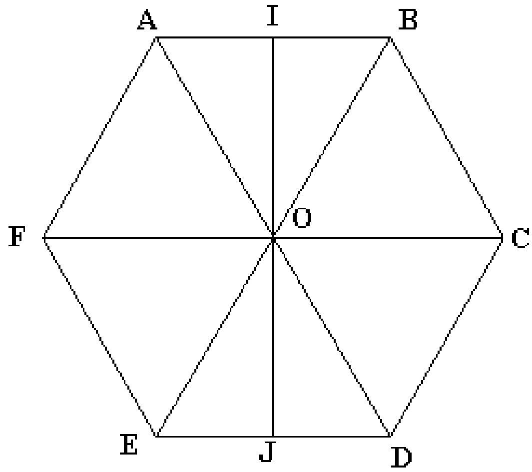
VECTEURS – EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.



On considère un hexagone régulier ABCDEF de centre O, et I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [ED]. En utilisant les lettres de la figure citer :

1) Deux vecteurs égaux

………………………………………………………

2) Deux vecteurs de même direction, de sens contraire et de normes différentes

………………………………………………………

3) Deux vecteurs de même direction, de même sens et de normes différentes

………………………………………………………

4) Deux vecteurs de direction différentes et de même norme.

………………………………………………………

5) Deux vecteurs opposés.

………………………………………………………

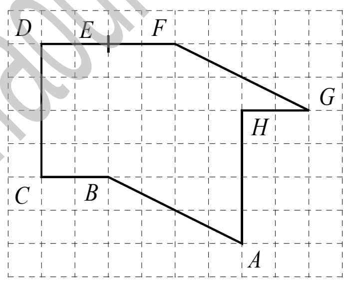
Exercice n°2. Compléter les pointillés à l'aide de la **relation de Chasles**

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{B.}$ $\quad$ $\overrightarrow{.E} = \overrightarrow{F.} + \overrightarrow{G.}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{..}$ $\quad$ $\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XL} + \overrightarrow{.K}$

$\overrightarrow{H.} = \overrightarrow{..} + \overrightarrow{IJ}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{.C} + \overrightarrow{.D} + \overrightarrow{..}$ $\quad$ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{.A} + \overrightarrow{A.}$ $\quad$ $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R.} + \overrightarrow{.S}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{.P} + \overrightarrow{..}$ $\quad$ $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{.M}$ $\quad$ $\overrightarrow{.Y} = \overrightarrow{XJ} + \overrightarrow{..} + \overrightarrow{.R}$

Exercice n°3.On considère la figure-contre :



En n'utilisant que les lettres représentées sur cette figure, compléter :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} =$……………………………………………………………………

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$ ……………………………………………………………………

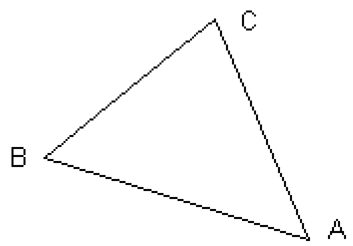
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} =$……………………………………………………………………

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} =$……………………………………………………………………

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GF} =$……………………………………………………………………

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB} =$……………………………………………………………………

Exercice n°4. ABC est le triangle ci-contre

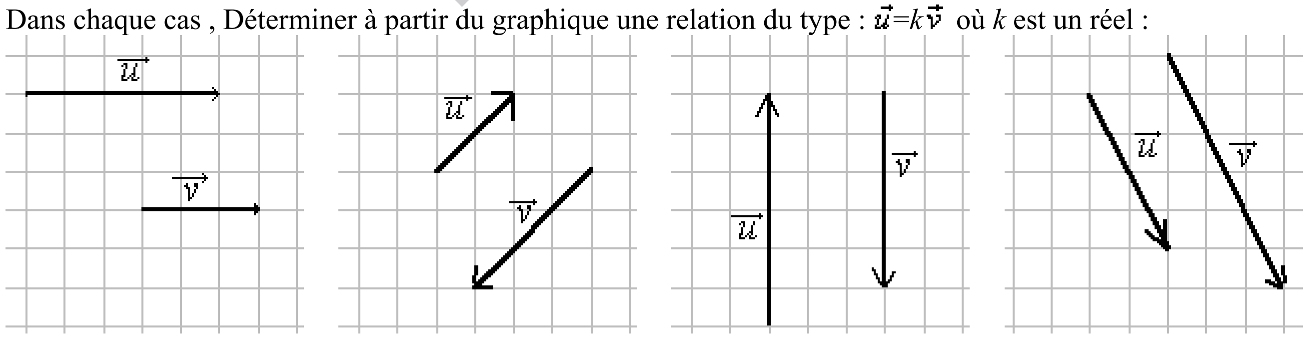


1) Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

2) Démontrer que A est le milieu de [ED] .

Exercice n°5.

Dans chaque cas , Déterminer à partir du graphique une relation du type : $\vec{u}=k\vec{v}$ où k est un réel :



……………………… ……………………… ……………………… ………………………

Exercice n°6. ABCD étant un parallélogramme, construire les points I, J et K tels que :

$\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DJ} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB}$

Exercice n°7.

Soit A et B deux points distincts d’un plan. Placer le point G tel que $-2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Exercice n°8.

1) Exprimer plus simplement le vecteur : $\vec{n} = 2\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont 3 vecteurs. Déterminer le nombre **k** tel que $\vec{w} = \mathbf{k}\vec{u}$ sachant que $\vec{u} = -\frac{5}{4}\vec{v}$ et que $\vec{w} = \frac{2}{3}\vec{v}$.

Exercice n°9. Soient trois points A, B et C distincts non alignés.
Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{x}$ sont-ils colinéaires dans les cas suivants?

1) $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{x} = -6\overrightarrow{AB}$

2) $\vec{w} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{x} = 4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$

3) $\vec{w} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\vec{x} = 9\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

4) $\vec{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{x} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{AC}$

5) $\vec{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

6) $\vec{w} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

Exercice n°10. On considère un triangle ABC.

1) Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

2) Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

3) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Que peut-on en déduire pour (MN) et (BC) ?

Exercice n°11.
Soit ABCD un quadrilatère quelconque. On désigne par I,J,K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA]

1) Trouvez le nombre h tel que $\overrightarrow{IJ} = h\overrightarrow{AC}$

2) Que peut-on dire de $\overrightarrow{LK}$?

3) Conclure sur la nature du quadrilatère IJKL

Exercice n°12. On considère un triangle ABC.

On désigne par P le milieu de [AB], et par Q et R les points définis par $\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{RC} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

1) Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$?

3) Que peut-on en déduire ?

Exercice n°13. Soit ABC un triangle.

On désigne par D et E les points tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Montrer que le point B est le milieu du segment $[ED]$.

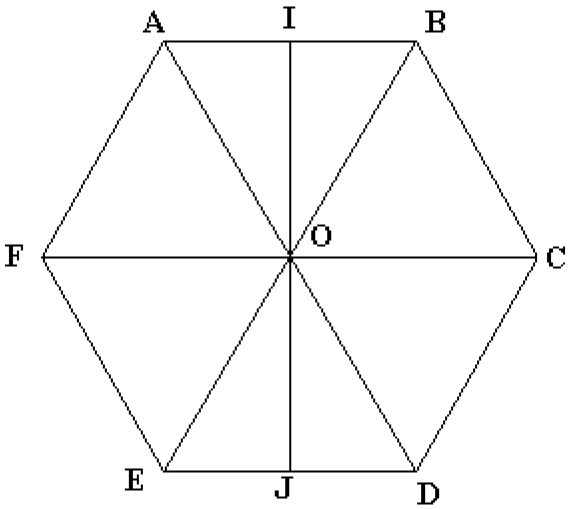
Exercice n°14. Soit ABC un triangle.

1) On désigne par J, D et K les points tels que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que les points J, D et K sont alignés.

VECTEURS – CORRECTION

Exercice n°1



1) Deux vecteurs égaux sont par exemple :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED}$
ou encore $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$

2) Deux vecteurs de même direction, de sens contraire et de normes différentes sont par exemple :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}$

3) deux vecteurs de même direction, de même sens et de normes différentes sont par exemple :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FC}$

4) Deux vecteurs de direction différentes et de même norme sont par exemple :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

5) Deux vecteurs opposés sont par exemple :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$

Exercice n°2 Compléter les pointillés à l'aide de la **relation de Chasles**

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}$ $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XL} + \overrightarrow{LK}$ $\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IJ}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AS}$ (ou n'importe quelle autre lettre que A) $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XJ} + \overrightarrow{RY} + \overrightarrow{JR}$ (on change alors l'ordre des vecteurs dans la somme)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$ $\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KM}$

Exercice n°3 On considère la figure suivante :

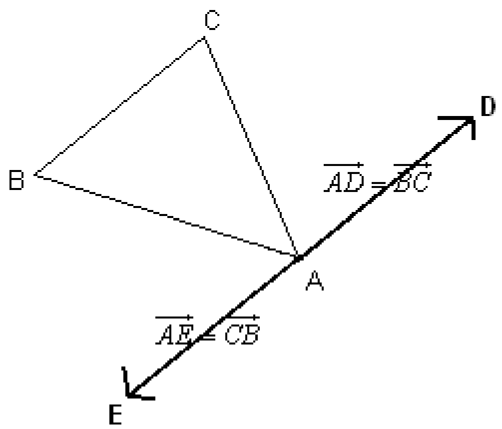
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FH}$
$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$
$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$
$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$

Exercice n°4

1)

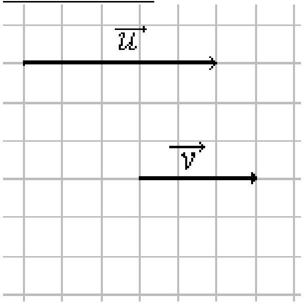
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \underbrace{\left(-\overrightarrow{AB}\right)}_{\text{opposé du}}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overbrace{\overrightarrow{BA}}^{\text{vcteur } \overrightarrow{AB}} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \underbrace{\left(-\overrightarrow{AC}\right)}_{\text{opposé du}}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overbrace{\overrightarrow{CA}}^{\text{vcteur } \overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$



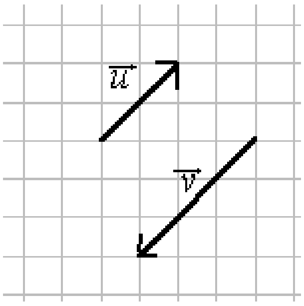
2) Puisque $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, on déduit que $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}$, qui caractérise le fait que A est le milieu de {ED]

Exercice n°5



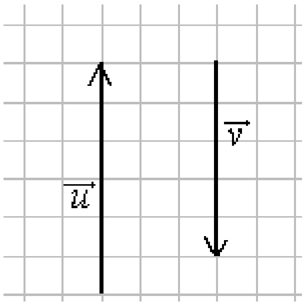
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, et sont de même sens donc $k>0$.

$\vec{u}=\frac{5}{3}\vec{v}$



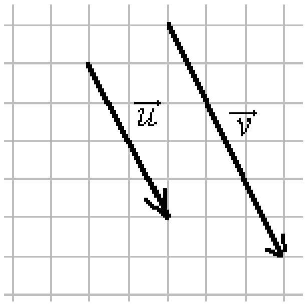
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, et sont de sens contraire donc $k<0$.

$\vec{u}=-\frac{2}{3}\vec{v}$



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, et sont de sens contraire donc $k<0$.

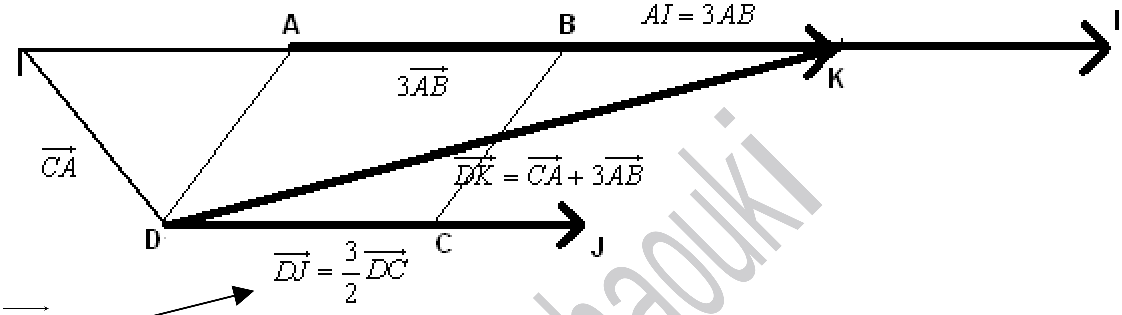
$\vec{u}=-\frac{6}{5}\vec{v}$



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, et sont de même sens donc $k>0$.

$\vec{u}=\frac{4}{6}\vec{v}=\frac{2}{3}\vec{v}$

Exercice n°6



$\overrightarrow{DJ}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$

Exercice n°7

1) On écrit

$\vec{n}=2\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

$=2\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}$

$=\cancel{2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MA}}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$

2) Si $\vec{u}=-\frac{5}{4}\vec{v}$, alors $\vec{v}=-\frac{4}{5}\vec{u}$. Si $\vec{w}=\frac{2}{3}\vec{v}$, alors $\vec{v}=\frac{3}{2}\vec{w}$

Ainsi $\begin{cases}\vec{v}=-\frac{4}{5}\vec{u}\\ \vec{v}=\frac{3}{2}\vec{w}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\vec{w}=-\frac{4}{5}\vec{u}\Leftrightarrow\vec{w}=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{4}{5}\vec{u}\right)=-\frac{8}{15}\vec{u}$

Ainsi le nombre nombre **k** tel que $\vec{w}=\mathbf{k}\vec{u}$ vaut $k=-\frac{8}{15}$

Exercice n°8

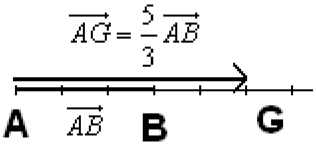
$-2\overrightarrow{GA}+5\underbrace{\overrightarrow{GB}}_{\text{Relation de Chasles}}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow-2\overrightarrow{GA}+5\overbrace{\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)}=\vec{0}\Leftrightarrow-2\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}=-5\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$

D'où une construction du point G :



Exercice n°9

1) Si $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{x} = -6\overrightarrow{AB}$, alors $-3\vec{w} = -3\times 2\overrightarrow{AB} = -6\overrightarrow{AB} = \vec{x}$. Puisque $\vec{x} = -3\vec{w}$, les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

2) Si $\vec{w} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{x} = 4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$, alors
$-2\vec{w} = -2\left(-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}\right) = (-2)\times\left(-2\overrightarrow{AB}\right) + (-2)\times 3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC} = \vec{x}$.
Puisque $\vec{x} = -2\vec{w}$, les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

3) Si $\vec{w} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\vec{x} = 9\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$, les vecteurs ne sont pas colinéaires, car s'il existait un réel k tel que $k\vec{w} = \vec{x}$, on aurait $k\vec{w} = k\left(3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = 3k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC} = \vec{x}$ si et seulement si $\begin{cases} 3k = 9 \\ -k = -2 \end{cases}$. Or il n'existe aucune valeur k réelle solution de ce système

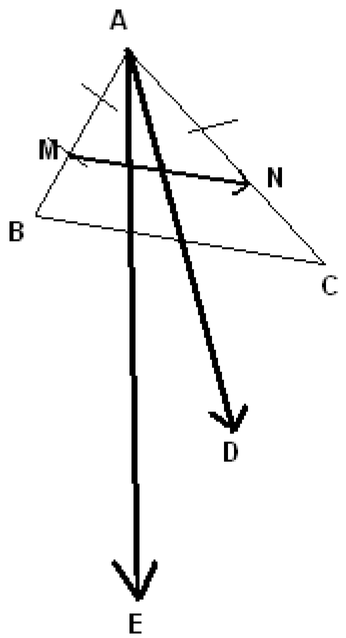
4) Si $\vec{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{x} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{AC}$, alors $-3\vec{w} = -3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{AC} = \vec{x}$. Puisque $\vec{x} = -3\vec{w}$, les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

5) Si $\vec{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$, les vecteurs ne sont pas colinéaires, car s'il existait un réel k tel que $k\vec{w} = \vec{x}$, on aurait $k\vec{w} = k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) = \frac{k}{3}\overrightarrow{AB} + 2k\overrightarrow{AC} = \vec{x}$ si et seulement si $\begin{cases} \frac{k}{3} = \frac{1}{2} \\ 2k = -3 \end{cases}$. Or il n'existe aucune valeur k réelle solution de ce système

6) Si $\vec{w} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ alors $\frac{5}{4}\vec{w} = \frac{5}{4}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{5}{4}\times\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{4}\times\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \vec{x}$. Puisque $\vec{x} = \frac{5}{4}\vec{w}$, les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Exercice n°10

1) et 2) voir ci-contre



3)

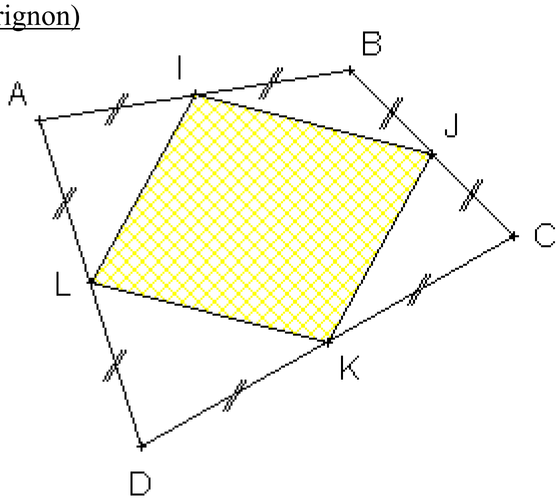
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant colinéaires,
on déduit que les droites (MN) et (BC) sont parallèles

Exercice n°11 (le Théorème de Varignon)



1) Dans le triangle ABC, I étant le milieu de [AB]et J celui de [BC], on applique la propriété dite de la droite des milieux (ou de Thalès Vectoriel) pour conclure que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) Dans le triangle ACD, L étant le milieu de [AD]et K celui de [CD], on applique la propriété dite de la droite des milieux (ou de Thalès Vectoriel) pour conclure que $\overrightarrow{LK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3) Puisque $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{LK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, on conclut que $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$, donc que IJKL est un parallélogramme.

Exercice n°12

1) On écrit

$$\overrightarrow{PQ}=\underbrace{\overrightarrow{PB}}_{\text{car P est}}+\overrightarrow{BQ}$$

$$=\overbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}^{\substack{\text{le milieu}\\ \text{de }[AB]}}+\overbrace{\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)}^{\text{par définition}}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Si $\overrightarrow{RC}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$, alors, on peut écrire de plus que $\overrightarrow{CR}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$, d'où :

$$\overrightarrow{PR}=\underbrace{\overrightarrow{PA}}_{\text{car P est}}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}$$

$$=\overbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}^{\substack{\text{le milieu}\\ \text{de }[AB]}}+\overrightarrow{AC}+\overbrace{\left(\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}\right)}^{\text{par définition}}$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

2) On calcule

$$-\frac{3}{5}\overrightarrow{PQ}=-\frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=-\frac{3\times 5}{5\times 6}\overrightarrow{AB}+\frac{3\times 1}{5\times 3}\overrightarrow{AC}$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$=\overrightarrow{PR}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont donc colinéaires

3) On en déduit que les points P, Q et R sont alignés

Exercice n°13

1) On va exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ afin de montrer qu'ils sont colinéaires

On écrit d'une part :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{BA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$= -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Et d'autre part :

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$$

$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

$$= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

Puisque $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BE}$, on en déduit que le point B est le milieu du segment $[ED]$.

Exercice n°14

On écrit successivement :

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

puis $\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, ce qui nous permet de constater que $\overrightarrow{JD} = 4\overrightarrow{JK}$, donc de conclure que les points J,D et K sont alignés.