EXERCICE N°1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=(x^3-1)\sqrt{x^2+1}$

1°)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2°)Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et en déduire que le signe de f'(x) et le même que celui de $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - x$.

3°)Soit $Q(x) = 4x^3 + 3x - 1$, *étudier les variations de Q sur R et démontrer que l'équation Q(x) = 0 admet une unique solution* α *sur R dont on donnera une valeur approchée à* 10^{-3} *près.*

4°)En déduire le signe de Q(x) puis le signe de f'(x).

5°)Dresser le tableau de variation de f sur R.

6°) Tracer la courbe (ζf) *de la fonction f .*

EXERCICE N°2

Soient les fonctions f et g définies dur R par : $g(x) = x^3 + 3x - 2$ *et* $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

On désigne par C_g *et* C_f *les courbes représentatives de g et f dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

Partie A

1°)Etudier les variations de g et tracer sa courbe C_g

2°)Montrer que l'équation : g(x) = 0 , admet une unique solution ε *tel que* $\varepsilon \in \left]\dfrac{1}{2},1\right[$

3°)Déterminer en fonction de ε *les réels a et b tel que :* $g(x) = (x - \varepsilon)(x^2 + ax + b)$

4°)Determiner alors le signe de g

Partie B

1°) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)-x\right)$

Interpréter le résultat obtenu

2°) Montrer que , pour tout x de R on a : $f'(x) = \dfrac{x.g(x)}{(x^2+1)^2}$

3°) Dresser le tableau de variation de f

4°)Montrer que : $f(\varepsilon) = \dfrac{3(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2+1}$

5°)Montrer que : $0 < f(\varepsilon) < \dfrac{6}{5}$

6°)Construire la courbe représentative C_f *de f*

EXERCICE N°3

Partie A

Soit P la fonction polynôme définie sur R par : $P(x) = x^3 - 3x + 4$.

1°) Etudier les variations de P.

2°) Démontrer que l'équation P(x) = 0 admet une unique solution α *dont on donnera une valeur approchée à* 10^{-2} *près.*

3°) En déduire le signe de P(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R par :* $f(x)=x+2+\dfrac{3x-2}{x^2}$ *et* C_f *sa courbe représentative dans un repère orthonormal* $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. *(unité 1 cm)*

1°) Démontrer que la courbe C_f *admet deux asymptotes que l'on précisera.*

Préciser la position de C_f *par rapport à la droite* Δ *d'équation* $y = x + 2$.

2°) Démontrer que $f'(x)=\dfrac{P(x)}{x^3}$ et en déduire le sens de variation de f.

3°) Déterminer le ou les points où la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.

4°) Tracer la courbe C_f, la droite Δ et les autres renseignements obtenus sur C_f,.

EXERCICE N°4

Partie I.

Soit la fonction f définie sur $R-\{2\}$par : $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$ où a , b et c sont des réels.

On désigne par (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer les réels a , b et c pour que:

- La courbe (ζf) passe par le point A(0,-1)
- La fonction f admet un extremum en 0
- La courbe (ζf) admet au point d'abscisse 1 une tangente de coefficient directeur (-3)

Partie II.

On donne a = 1 , b = -1 et c = 2.

1°)Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2°)Préciser les extremum de f .

3°)En utilisant les variations de f comparer les nombres : $A=\dfrac{2008\times2007+2}{2006}$ et $B=\dfrac{2009\times2008+2}{2007}$

EXERCICE N°5

Soit f une fonction vérifiant

1. f définie et continue sur R
2. $\lim\limits_{+\infty} f=1$
3. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$
5. Pour tout $x\in]-\infty,1]$: $f(x)>x$
6. Pour tout $x\in]-\infty,1[$: $f'(x)>0$
7. Pour tout $x\in]1,+\infty[$: $f'(x)<0$
8. f(1) = 3

1°)Interpréter géométriquement les points: **2** , **3** , et **4** .

2°)Dresser le tableau de variations de f .

3°)Tracer l'allure de (ζf) où (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

EXERCICE N°6

Partie A

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=x^4-4x-3$

1°) Etudier les variations de g.

2°) a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet deux solutions α et β sur R telles que : $\alpha<0<\beta$.

b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α et de β.

c) Déterminer le signe de g(x) en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R \ {1} par : $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3-1}$

1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) a) Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que pour tout $x\neq1$: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx^2+dx+e}{x^3-1}$

b) En déduire que la courbe C_f représentative de f admet une asymptote oblique que l'on indiquera.

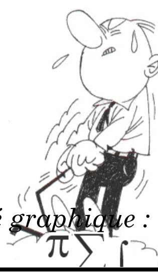
c) Préciser la position de C_f par rapport à la droite d'équation y = x.

3°) a) Démontrer que $f'(x)=\dfrac{x^2g(x)}{(x^3-1)^2}$

b) En déduire les variations de f.

4°) En utilisant les encadrements de la partie A, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ et de $f(\beta)$.

5°) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1.



6°) Dresser le tableau de variation complet de f et tracer C_f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)

EXERCICE N°7

Soit la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ *par* $f(x)=2x+\sqrt{x^2-4}$ *. On désigne par* (ζf) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *du plan.*

1°)a)Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-4}{x-2}$ *et interpréter géométriquement le résultat.*

b)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$*. Interpréter géométriquement le résultat.*

2°)Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ *et calculer* $f'(x)$ *pour tout* $x\in\,]2,+\infty[$.

3°) Tracer la courbe (ζf) *de la fonction f .*

4°)Montrer que f est une bijection de $[2,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera. On note* f^{-1} *sa fonction réciproque.*

5°)a)Sur quelle intervalle K , f^{-1} *est continue*

b)Etudier les variations de f^{-1}

6°)Construire la courbe (ζf^{-1}) *de la fonction* f^{-1} *dans le même repère.*

7°)Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in J$

EXERCICE N°8

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ *par :* $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

1°)Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ *et calculer* $f'(x)$ *.*

2°)Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat obtenu.

3°)Dresser le tableau de variation de f .

4°)Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera .*

5°)Montrer que pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \dfrac{1+x^2}{2x}$

6°)On désigne par C et C' les courbe respectives de f et f^{-1} *dans même repère orthonormé .*
montrer que la droite D : $y = 2x$ *est une asymptote oblique à C.*

7°)Tracer C et C' .

EXERCICE N°9

On considère la fonction f définie sur $[-1,1]-\{0\}$ *par :* $f(x) = 1 + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

On note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé R .

1°)Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *;* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ *et interpréter les résultats obtenus*

2°)Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse x=1 et interpréter le résultat obtenu.

3°) Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse x=-1 et interpréter le résultat obtenu.

4°)Montrer que : $\forall x\in\,]-1,1[-\{0\} : f'(x) = \dfrac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

5°)Dresser le tableau de variation de la fonction f .

6°)Montrer que f réalise une bijection de $]0,1[$ *sur un intervalle J que l'on précisera .*

7°)Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour tout x de J .*

8°) Représenter dans le même repère R la courbe C et C' de f^{-1} *.*