

Résumé : Fonctions réciproques
Niveau : *Bac sciences expérimentales*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : *saberbjd2003@yahoo.fr*

Définition : "Bijection"

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction définie sur I .

On dit que f réalise une **bijection** de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout $y \in f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I .

Théorème :

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I , alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Définition : "Fonction réciproque"

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

On appelle **fonction réciproque** de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout $y \in f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$.

Conséquence :

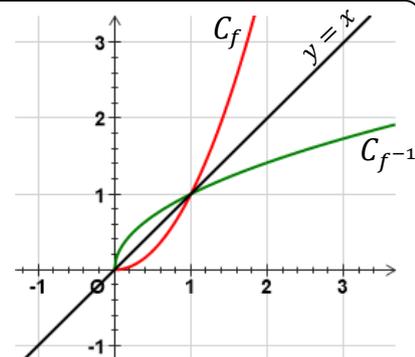
Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.

Pour tout $x \in I$ et tout $y \in f(I)$:

- ❖ $f(x) = y$ équivaut à $f^{-1}(y) = x$.
- ❖ $f^{-1} \circ f(x) = x$.
- ❖ $f \circ f^{-1}(y) = y$.

Conséquence :

Les courbes représentatives d'une bijection f et de sa fonction réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Théorème :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors sa fonction réciproque f^{-1} continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f .

Théorème :

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$, $a \in I$ et $b = f(a)$.

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$$

Corollaire :

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

Si f est dérivable sur I et si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et pour tout $y \in f(I)$:

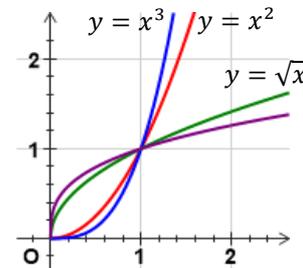
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Théorème et définition : "Fonction racine $n^{\text{ème}}$ "

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ .

Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ , appelée fonction racine $n^{\text{ème}}$.



Notation :

L'image d'un réel positif x par la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est notée $\sqrt[n]{x}$ et se lit : "racine $n^{\text{ème}}$ de x ".

Lorsque $n = 2$ et pour x positif, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Conséquence :

Pour tous réels positifs x et y : $y = x^n$ si et seulement si $x = \sqrt[n]{y}$.

Conséquence :

Soit n et p deux entiers tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b .

1) $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

2) $(\sqrt[n]{a})^n = a$

3) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

4) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

5) $\sqrt[n^p]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

6) $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

Conséquence :

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pour tout $x > 0$.