PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION

1- **Domaine de définition D_f.**
2- **Parité et périodicité $\longrightarrow$ domaine d'étude D_E.**
3- **Limites**
4- **Signe de f'(x)**
5- **Tableau de variation : indiquer si possibles les asymptotes, extremums, points d'inflexion, les points où les tangentes sont horizontales ou verticales.**
6- **Branches infinies et déterminer si possible les points où la courbe de f coupe les axes et les asymptotes.**

Parité : Une fonction f de domaine de définition D est dite paire (res impaire) ssi $\forall$ x $\in D_f$, -x $\in D_f$ et f (-x) = f(x) (res f(-x) = - f(x)) .Dans ce cas, D = $D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \subset \mathbb{R}_+$ et $D_2 \subset \mathbb{R}_-$
ζ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).(rep ζ est symétrique par rapport a l'origine O du repère.
Il suffit de faire l'étude de f sur D_1 et on complète la courbe ζ par symétrie ; D_1 est appelé domaine d'étude de f noté D_E.

Périodicité : La fonction f est dite périodique s'il existe un réel a non nul tel que :
$\forall$ x $\in$ D : a+x $\in$ D et f(x+a) = f(x)
a est appelé une période de f et on dit que f est a-périodique. Dans ce cas on limite le domaine d'étude à un ensemble de la forme $D_0 = [x_0, x_0+a[\cap D$, et on continue la courbe par translation.

Axe de symétrie : Soit f une fonction définie sur un domaine D inclus dans R et ζ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O , $\vec{i}, \vec{j}$).
La droite Δ dont une équation est x = a est un axe de symétrie pour la courbe ζ ssi pour tout x de D, on a : 2a-x $\in$ D et f(2a-x) = f(x)

Centre de symétrie : Soit I(a,b) un point du repère ; I est un centre de symétrie pour la courbe ζ ssi pour tout x de D, on a : 2a-x $\in$ D et f(2a-x) = 2b - f(x)

Tangentes à une courbe :
Si f est dérivable en un point a de D alors sa courbe admet au point A(a, f(a)) une tangente d'équation y = f'(a)(x-a)+f(a).
Si f est dérivable à droite (resp à gauche) d'un point a de D alors sa courbe admet au point A(a, f(a)) une demie-tangente d'équation y = f_+'(a)(x-a)+f(a) (rep y = f_-'(a)(x-a)+f(a)
Si $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe de f admet au point A(a, f(a)) une demie-tangente verticale dirigée vers le haut.
Si $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe de f admet au point A(a, f(a)) une demie-tangente verticale dirigée vers le bas.

Théorème des valeurs intermédiaires :
Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b]. Pour tout réel α compris entre f(a) et f(b) il existe au moins un réel x_0 de [a, b] tel que $f(x_0) = \alpha$.

Corollaire1 :
Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b] (a< b)et telle que : f(a) . f(b) < 0 il existe alors au moins un réel x_0 de] a, b [tel que $f(x_0)$ = 0.Si de plus f est monotone alors la solution est unique.

Corollaire2 :
Si une fonction f est continue sur [a , b]et ne s'annule pas alors elle garde un signe constant sur [a , b].

Théorème de Rolle :
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b]et vérifiant f(a) = f(b).
Si f est dérivable sur]a , b[alors il existe au moins un réel x_0 de] a , b [tel que f'(x_0) = 0.

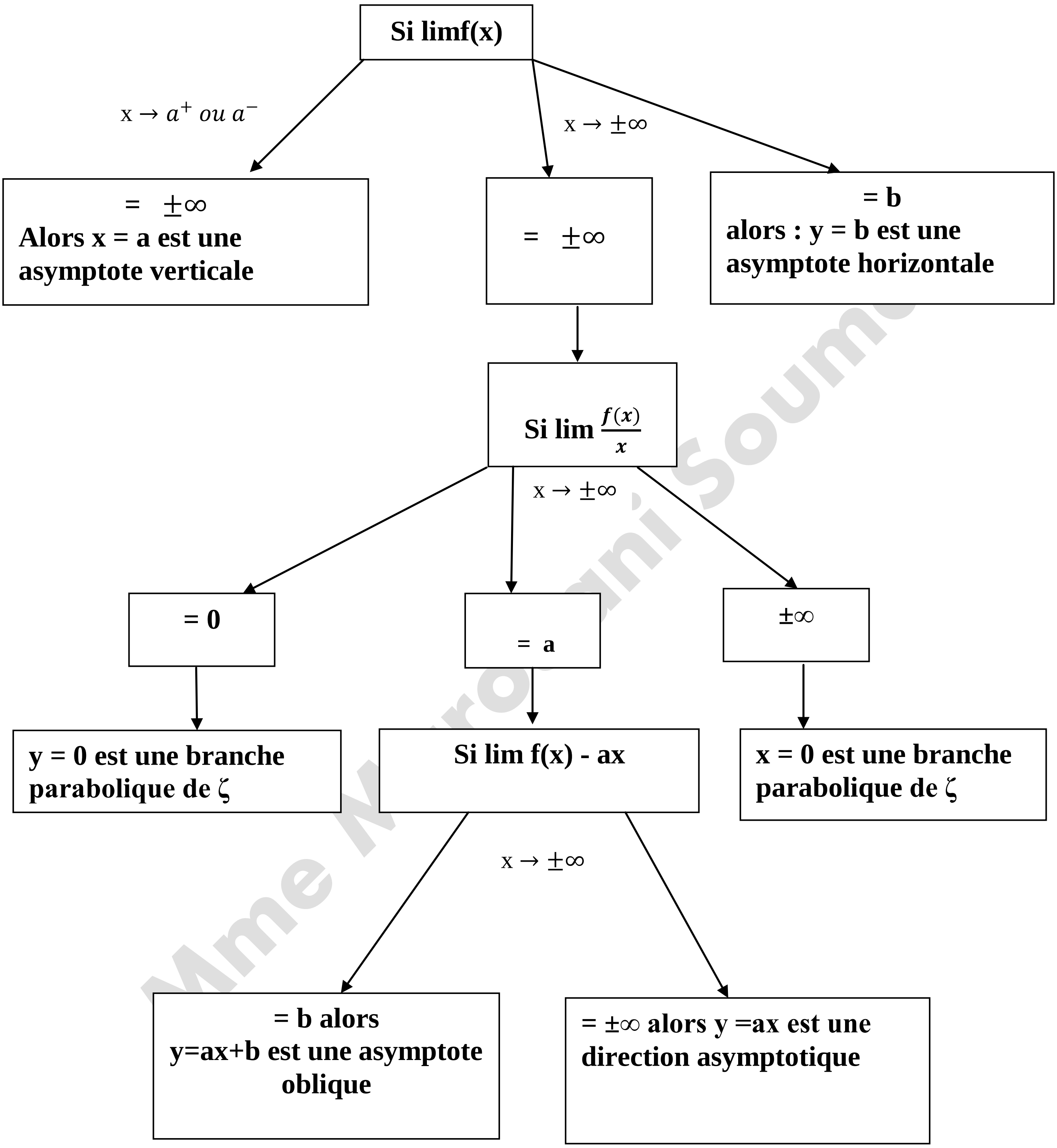
Théorème des accroissements finis :
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b](a < b) et dérivable sur]a , b [. Il existe alors au moins un élément x_0 de]a,b[tel que f'(x_0) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Théorème : Inégalités des accroissements finis
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné [a, b](a < b) et dérivable sur]a , b [.On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que : m $\leq$ f'(x) $\leq$ M pour x $\in$]a,b[.
Alors on a : m $\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq$ M.

Corollaire :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe un réel k strictement positif tel que : $|f'(x)| \leq$ k pout tout x de I.
Alors on a : $|f(b) - f(a)| \leq$ k $|b-a|$ pour tous a et b de I.

Mme Marouani Soumaya
www.devoirat.net 2017

Asymptotes et branches paraboliques



RQ : y = ax+b est une asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$ SSI
$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$.

www.devoirat.net 2017