

Exercice n°1 : (3 Pts)

Répondre par « vrai » ou « faux » en justifiant la réponse.

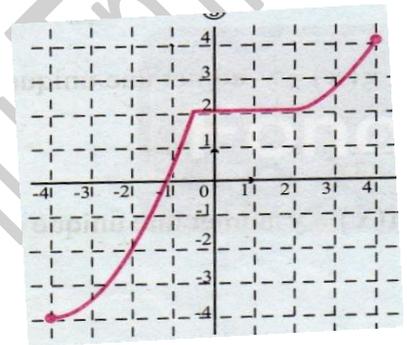
1) Soit $U_n = \frac{2}{5} + (\frac{2}{5})^2 + \dots + (\frac{2}{5})^n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{2}{5}$.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit les points du plan complexe $M(z)$ et $M'(z')$ tels que

$$\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg(z') \pmod{2\pi}, \text{ alors } (OM) \perp (OM').$$

3) L'équation $f(x) = k$ admet une solution unique pour tout réel k de l'intervalle $[-4, 4]$ (la courbe ci-contre est celle de f)

**Exercice n°2 : (5.5 Pts)**

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ 4x^3 + 6x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos(\pi x)}{x} - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $-1 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} - 1$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2) Etudier la continuité de f en 0 .

3) Soit la fonction g restriction de f sur $[-1, 0]$.

a) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $]-1, 0[$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-1, 0[$

c) Montrer que : $\alpha = \frac{1}{2\alpha(2\alpha+3)}$.

Exercice n°3 : (5.5 Pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) ,

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1) a) Donner la forme exponentielle de z_B et z_C .

- b) Placer les points A , B et C, puis déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.
- c) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $|z| = |z - 2|$.
- 2) A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{-4}{z-2}$.
- a) Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de z' pour $z = 2i$.
- b) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.
- c) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de (E). Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (Γ).

Exercice n°4 : (6 Pts)

Soit la suite réelle (U) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{3-U_n} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < 2$.
- b) Montrer que la suite (U) décroissante.
- c) En déduire que la suite (U) est convergente et calculer sa limite ℓ .
- 2) Soit la suite (V) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{-2+U_n}{U_n}$
- a) Montrer que (V) est une suite géométrique de raison 3.
- b) Exprimer V_n en fonction de n et retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- 3) a) Calculer en fonction de n, $S_n = \sum_{k=0}^n V_k = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- b) En déduire $S'_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{U_k} = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n}$ en fonction n.

Bon travail