



EPREUVE : MATHEMATIQUES

COEFFICIENT : 4

NIVEAU ET SECTION : 4^{ème} SC

Première trimestre

Date : 15 Novembre 2012

Durée : 2 Heures

QCM : 4,5pts

Dans chaque question indiquer la bonne réponse.

1) Soit $Z = -3 \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i} \right)$ alors :

a) Un argument de Z est : $-3 \arg \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i} \right)$; $\pi + \arg(1+i\sqrt{3}) - \arg i$; $-3 \frac{\arg(1+i\sqrt{3})}{\arg i}$

b) Le module de Z est : $-3 \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{i} \right|$; $3 |1+i\sqrt{3}|$; $3 (|1+i\sqrt{3}| - |i|)$

2) Les solutions de l'équation $z^6 = 8i$ sont les z_k avec $k \in \{0; 1; \dots \dots \dots 5\}$ vérifiant :

$$z_k = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right)} ; \quad z_k = \sqrt{2} e^{-i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right)} ; \quad z_k = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right)}$$

3) On note (E) : $3z^2 - z + 5 = 0$ alors (E) possède dans \mathbb{C} :

Deux solutions réelles une racine double deux solutions conjuguées

4) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[-1; 3]$ vérifiant $f(-1) = -2$ et $f(3) = -1$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[-1; 3]$:

deux solutions une seule solution aucune solution.

5) Soient f et g deux fonctions tels que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} fog(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} gof(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1} gof(x) = 3$$

Ex2 : 8pts

A- Soit $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ 4x^3 + 6x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos(\pi x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) Montrer que $\forall x > 0 ; 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$

c) En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Etudier la continuité de f en -1 et en 0 .

B- Soit $g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer le domaine de continuité de g .

2) Soit h la restriction de g à l'intervalle $[1; +\infty[$.

a) Montrer que h est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

b) Déterminer $h^{-1}([1; +\infty[)$.

c) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $[4; 5]$ une unique solution α .

3) Soit $\varphi(x) = h(x) + x \quad \forall x \in [1; +\infty[$.

a) Montrer que φ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

b) Déterminer $\varphi([2; 3])$.

c) Déduire que l'équation $h(x) = -x$ admet dans $[2; 3]$ une unique solution x_0 .

Ex3 : 7,5pts

A- 1) Soit $a = -1 - 2i\sqrt{2}$ un nombre complexe. Déterminer les racines carrées de a .

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (1 + i\sqrt{2})z + i\sqrt{2} = 0$.

B- On donne les points : A ; B ; M et M' les points d'affixes respectives : 1 ; $i\sqrt{2}$; z et $z' = \frac{z - i\sqrt{2}}{z - 1}$ avec $z \neq 1$

1) a) Montrer que $|z'| = \frac{BM}{AM}$.

b) Dédire l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $|z'| = 1$.

2) Chercher l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $\text{Arg}(z') \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

3) a) Montrer que $\forall z \neq 1 ; |z' - 1| |z - 1| = \sqrt{3}$.

b) Dédire que si M appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{3}$ alors M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

4) Soit D le point d'affixe $z_D = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0; \pi[$.

a) Vérifier que : $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) Dédire AD en fonction de θ .

c) Déterminer la valeur de θ pour que : ABD soit isocèle en A .

Bon travail