

Exercice n°1 : (3 points)

Choisir l'unique bonne réponse et sans justification.

1) Soit (U_n) une suite qui vérifie : $|U_n - 1| \leq \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ alors :

- a) U converge vers 1 b) U converge vers 0 c) U est divergente

2) Le plan complexe est muni d'une repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On donne les points A et B d'affixes respectifs $Z_A = 2i$ et $Z_B = -2i$ alors l'ensemble des points M d'affixe Z vérifiant

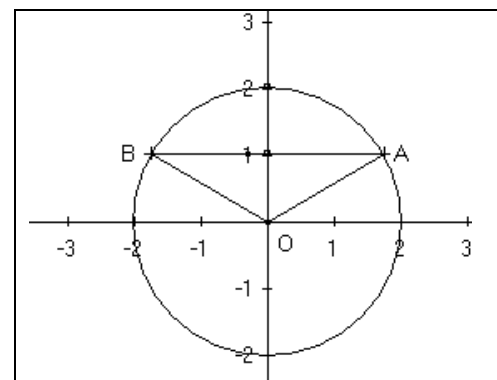
$|\bar{Z} + 2i| = 2$ est :

- a) le cercle de centre A et de rayon 2 b) le cercle de centre B et de rayon 2

3) Le plan complexe est muni d'une repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On donne dans la figure ci contre un cercle de centre O et de rayon 2 et deux points A et B tel que :

$Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors :

- a) $Z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ b) $Z_B = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ c) $Z_B = 2e^{5i\frac{\pi}{6}}$



Exercice n°2 : (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A et B d'affixes respectifs $Z_A = \sqrt{3} + i$ et $Z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

- 1) a) Ecrire sous forme exponentielle Z_A et Z_B .
b) Construire les points A et B dans le repère.
c) Ecrire $\frac{Z_B}{Z_A}$ sous forme exponentielle.
d) Déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.
e) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point C pour que le quadrilatère OACB soit un carré.

2) Soit un point M d'affixe $Z_M = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

- a) Montrer que $Z_M = 2 \cos \theta e^{i\theta}$ puis vérifier que c'est son écriture sous forme exponentielle.
b) Déterminer la valeur de θ pour que M varie sur la cercle de centre O et de rayon 2.
c) Déterminer la valeur de θ pour que O, A et M soient alignées.

Exercice n°3 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \\ x^3+2x+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $0 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x^2+1}$

b) Dédurre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Montrer que f est continue en 0.

3) a) Etudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$.

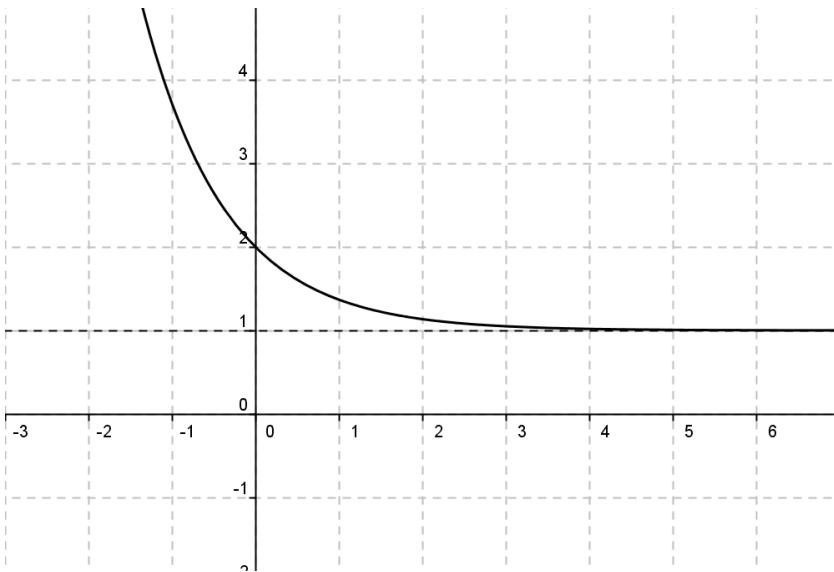
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 0]$ une unique solution α puis vérifier que $-0,5 \leq \alpha \leq -0,4$.

4) La courbe ci dessous représente une fonction g qui admet la droite $D : y=1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et une branche infinie parabolique au voisinage de $-\infty$ de direction (oy)

a) Dresser graphiquement le tableau de variation de g .

b) Calculer ces limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ g(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g\left(\frac{2x}{x-2}\right)$$



Exercice n°4 : (5 points)

On définit deux suites U et V par $U_0=1, V_0=12$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

1) On appelle W la suite définie pour tout entier naturel n par $W_n = V_n - U_n$

Montrer que W est une suite géométrique à terme positif dont on précisera la raison.

2) Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante

3) Montrer que les deux suites U et V convergent vers la même limite que l'on appellera α .

4) On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 3U_n + 8V_n$

a) Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante

b) Déterminer alors la valeur de α .

Bon travail