



Devoir de Contrôle N°1



Mathématiques

Exercice N°1

(3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

❶ La partie imaginaire du nombre complexe $z = (1-i)^2$ est :

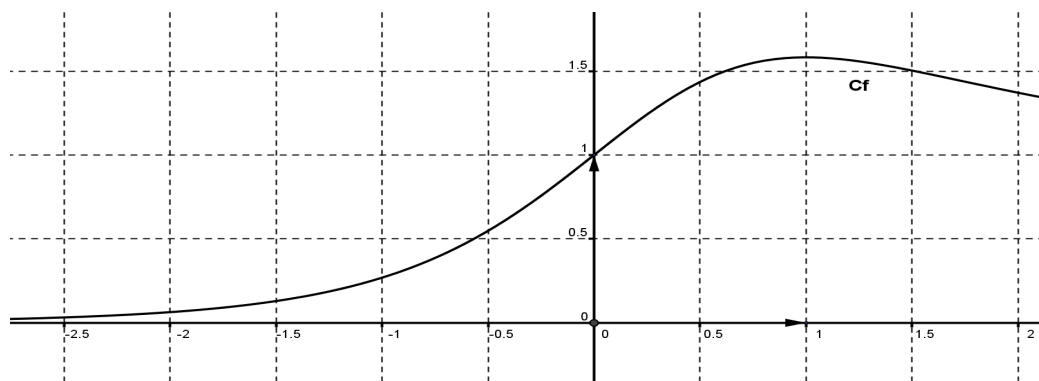
- a) -2 b) -2i c) -1

❷ On considère une suite (U_n) convergente définie sur \mathbb{N} et on définit la suite (V_n) par : $V_n = \frac{-2}{U_n}$ pour

tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (V_n) est :

- a) Convergente b) divergente c) on ne peut rien dire

❸ Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} dont sa courbe représentative est donnée ci-dessous



alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 5}\right) =$

- a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

Exercice N°2

(6 points)

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \end{cases} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{3U_n + V_n}{4}, V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$$

❶ Calculer U_1 et V_1

❷ On pose pour tout entier n : $W_n = U_n - V_n$

- a) Prouver que (W_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
b) En déduire que pour tout entier n , $U_n < V_n$

❸ a) Etudier la monotonie de chacune des suites (U_n) et (V_n) .

b) En déduire que pour tout entier n , $U_n \geq 1$ et $V_n \leq 2$.

c) Justifier que (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite L .

④ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_n = U_n + V_n$

a) Prouver que (A_n) est une suite constante.

b) Calculer alors L .

Exercice N°3

(6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On appelle J le point d'affixe i .

① On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives $a = -3 - i$, $b = -2 + 4i$, $c = 3 - i$ et $h = -2$.
Placer ces points sur une graphique, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

② Montrer que J est le centre du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC . Préciser le rayon du cercle \mathcal{C} .

③ Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe : $\frac{b-c}{h-a}$.

En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC , c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC .

④ On note G le centre de gravité du triangle ABC . Déterminer l'affixe g du point G

Placer G sur la figure.

⑤ Montrer que les points : G, J et H sont alignés.

⑥ On note A' le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AH]$. Le point A' a pour affixe $a' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

a) Déterminer l'affixe du point K .

b) Démontrer que le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.

Exercice N°4

(5 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x + \cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

① Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

② Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

③ Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

④ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]-\frac{1}{2}, 0[$.

b) En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2}$

⑤ Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Bon travail