

Exercice N°1 (5pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \dots\dots si \dots x \leq 0 \\ x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \\ \frac{1}{x^2+1} & \dots\dots si \dots x \geq 0 \end{cases}$

- 1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$
- 3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$; on a : $|f(x)| \leq x^3$
 b) En déduire la limite de f à droite en 0.
 c) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? justifier .
- 4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution $\alpha \in]1;2[$
 b) Vérifier que: $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}$
- 5) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{\pi}{f(x)}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{\alpha x^2}{x^2+1}\right)$

Exercice N° 2 (6pts)

Soit $\theta \in [0; \pi]$.

Dans **la figure1** (Annexe à rendre avec la copie) on donne :

- $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère orthonormé direct.
- (ζ) est un cercle de centre O et de rayon 1.
- E est un point de (ζ) tel que $(\vec{u}; \overrightarrow{OE}) \equiv \theta [2\pi]$.
- D est un point de $(O; \vec{v})$ tel que : $z_D = i\sqrt{1+\sqrt{2}}$

- 1) a) Vérifier que : $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$
 b) Soit A le point d'affixe $z_A = z_D \cdot e^{i\theta}$
 Vérifier que $z_A = OD \cdot e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$
 c) Construire alors le point A.
- 2) On considère l'équation (E): $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$
 a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).
 b) On désigne par B le point d'affixe z_B où z_B est la deuxième solution de l'équation (E) .

Prouver que : $z_B = \frac{1}{OD} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$.

3) a) Montrer que : O ; A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe $z_C = ODe^{i\theta}$

4) a) Montrer que : $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{AC})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

b) En déduire que ABC est un triangle isocèle et que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

c) Construire alors le point B.

Exercice N°3 (5pts)

1) Déterminer les racines cubiques de l'unité.

2) a) Vérifier que $\left[3\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})\right]^2 = -54 + 54\sqrt{3}i$

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E_1): 2z^2 + 3(i - \sqrt{3})z + 9(1 - i\sqrt{3}) = 0$
(On notera z_1 la solution imaginaire pure et z_2 l'autre solution)

c) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3) Soit le nombre complexe $z_3 = -\overline{z_2}$

Vérifier que $z_3 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$

4) Montrer que $z_1; z_2$ et z_3 sont les racines cubiques de $27i$

5) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E_2): z^6 - (1 + 27i)z^3 + 27i = 0$

Exercices N°4 (4 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 - U_n + 2}{1 + U_n} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq 2$

2) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(U_n - 1)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n - 1 \leq \frac{1}{3^n}$

c) Retrouver : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

NOMPRENOM

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

