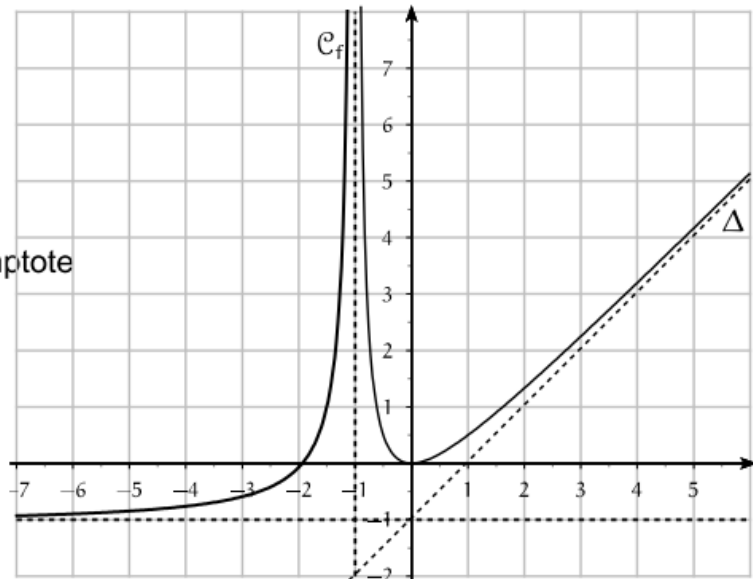


Exercice 1

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}/\{-1\}$ qui admet :

- La droite $\Delta : y=x-1$ comme asymptote oblique au voisinage de $(+\infty)$
- La droite $\Delta' : y=-1$ comme asymptote au voisinage de $(-\infty)$
- La droite d'équation $x=-1$ comme asymptote verticale à C_f



1) Déterminer graphiquement

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{-x+1}{x+1}\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x^2)}{x}$

2) Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Montrer que g est prolongeable par continuité en -1

3) a) Montrer que la fonction $f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f \circ f(x)}{f(x)}$

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit le nombre complexe $z = i + e^{i\theta}$; $\theta \in [0, \pi]$.

1) Vérifier que $z = 2 \cos\left(\frac{\pi - \theta}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi + \theta}{4}\right)}$

2) Pour cette question, on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$.

a) Ecrire z sous forme algébrique puis montrer que $|z|^2 = 2 + \sqrt{3}$.

b) Ecrire z sous forme exponentielle.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3) Soit les points $N(e^{i\theta})$, $A(-i)$ et $I(1)$.

a) Montrer que $\frac{z_{\overline{AN}}}{z_{\overline{AI}}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi - \theta}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

b) En déduire la valeur de θ pour laquelle les vecteurs \overrightarrow{AN} et \overrightarrow{AI} sont orthogonaux.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1+\sqrt{x} \cos x}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{4\sqrt{x^2+1}-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0 .

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + \frac{1}{4}x]$

b) Interpréter graphiquement le résultat .

4) a) Montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]\frac{\pi}{2}; \pi[$

b.) Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha - 1}$

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne $\theta \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$.

On considère les points M et N d'affixes respectives : $Z_M = i + e^{i\theta}$ et $Z_N = e^{i\theta}$.

1) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M lorsque θ varie dans $]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$.

2) Déterminer la valeur de θ pour laquelle O, M et N sont alignés .

3) Vérifier que la forme exponentielle de Z_M est : $Z_M = 2 \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})}$.

4) Pour toute la suite : $\theta = \frac{\pi}{3}$.

a) Ecrire Z_M sous forme cartésienne puis montrer que $|Z_M|^2 = 2 + \sqrt{3}$.

b) Ecrire Z_M sous forme exponentielle puis déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Bon courage « mr bourbia jaouhar »