

LYCEE BOUMERDES	Devoir de Synthèse N°1	4^{ème} Sc 1&2
Le Mercredi 24/01/2018	MATHEMATIQUES	Durée : 2 H
BRAIEK KHALIFA		

« Rien ne sert de courir, il faut partir à point »

Exercice N°1 (3pts)

I°)

Cet exercice est constitué de questions à choix multiples. Le candidat reproduira sur sa copie soigneusement la lettre désignant la bonne réponse et le texte de celle-ci

1) Soit f la bijection définie de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0; 1]$ par $f(x) = \sin x$.

Alors $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$ est égal à :

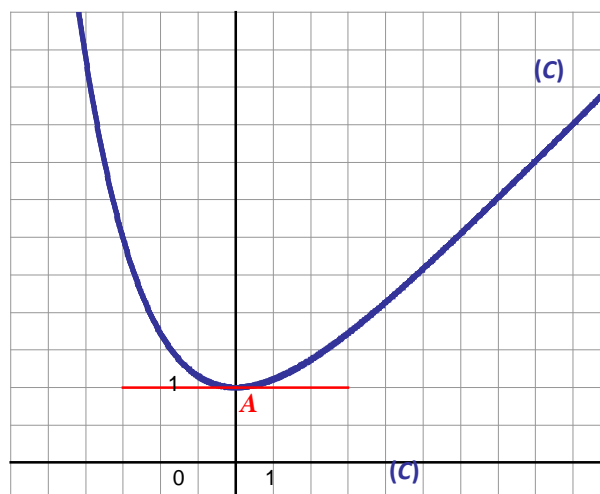
- a-) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. b-) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. c-) $\frac{-2}{\pi\sqrt{3}}$

2°) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x - 1)^n(x - 2)^{n+1}(x - 3)^{n+2}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Alors la courbe représentative de f admet :

- a-) Au moins deux tangentes horizontales.
b-) Au moins trois tangentes horizontales
c-) Admet une seule tangente horizontale.

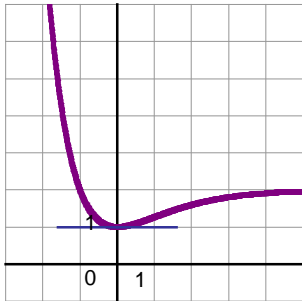
II°) La courbe (C) tracée ci-dessous dans un repère orthonormé est la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} . On désigne par f' la fonction dérivée de f sur \mathbb{R} .



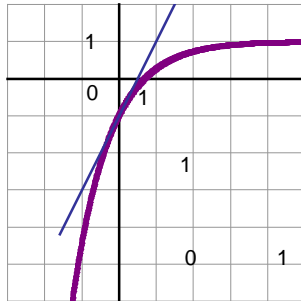
1. Au point $A(0;1)$, la courbe (C) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.

2. Une des quatre courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive F de la fonction f . Déterminer la courbe associée à la fonction F . (en justifiant la réponse)

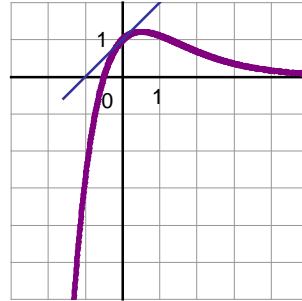
Courbe 1



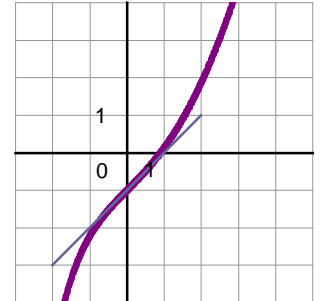
Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4



Exercice N°2 (5pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1, -1, 0)$; $B(3, 11)$; $C(3, 0, 0)$ et $D(0, 1, 1)$.

- 1) a- Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

b- En déduire que A, B et C forment un plan P.

c- Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

- 2) a- Calculer l'aire du triangle ABC.

b- Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c- Calculer le volume V du tétraèdre ABCD.

d- En déduire la distance de D au plan P.

- 3) Soit la droite $\Delta : \begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

a- Montrer que Δ est perpendiculaire à P.

b- Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de P et Δ .

c- En déduire la distance de A à la droite Δ .

Exercice N°3 : (5points)

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$

- 1) Montrer que f admet des primitives sur $[1, +\infty[$
- 2) Soit F la primitive de f sur $[1, +\infty[$ qui s'annule en 1. Donner le sens de variation de F .
- 3) Soit G la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = F(\frac{1}{\cos x})$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que $G'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $G(x) = \tan(x) - x$

c) Calculer $F(\sqrt{2})$ et $F(2)$

4) Soit la fonction h définie sur $]1, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{f(x)}$. Déterminer la primitive H de h sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en $\sqrt{3}$.

Exercice N°4 (7pts)

Le graphique ci-dessous (voir le page 4) est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]1, 2]$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{o}, \vec{i}, \vec{j})$.

La droite d'équation $x=1$ est une asymptote à C .

1) Par lecture graphique :

a) donner $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{x-2}$

b) Montrer que f réalise une bijection de $]1, 2]$ sur un intervalle J . Que l'on déterminera.

c) Construire la courbe C' de f^{-1} dans le même repère $(\mathbf{o}, \vec{i}, \vec{j})$ à la page 4

d) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et déterminer $(f_d^{-1})'(0)$

2) On admet que $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x-1}$

a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]1, 2]$

Vérifier que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3) On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Sachant que $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour tout $x \in [1, 2]$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - \alpha|$. Montrer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1 - \alpha|$$

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

II/ Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{f^{-1}(\tan 2x)} & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ $g(x) = \frac{1}{1 + \cos 2x}$

2) a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$.



