

**EXERCICE 1: 3 POINTS : Cocher la case correspondante dans la feuille annexe**

**BAREME**

Choisir sans justification la bonne réponse pour chaque question:

- 1- La suite  $U_n = 5 \times 3^{2n}$  est une suite géométrique de raison : **a)  $q = 5$  ; b)  $q = 3$  ; c)  $q = 9$**  1
- 2- Le reste de la division euclidienne de 376987 par 11 est: **a)  $r = 6$  ; b)  $r = 5$  ; c)  $r = 0$**  1
- 3- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . si  $d = \text{P.G.C.D}(n + 1, 2n + 3)$ , alors d est égale a: **a)  $d = 1$  ; b)  $d = 2$  ; c)  $d = n$**  1

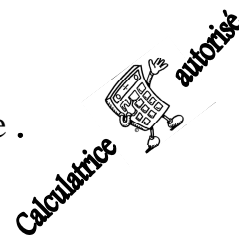
**EXERCICE 2: 2,5 POINTS**

- 1- Effectuer la division euclidienne du nombre 2017 par 6 0,5
- 2- Soit  $p$  un nombre premier supérieur a 3
- a- Montrer que les restes possibles de la division euclidienne de  $p$  par 6 sont 1 et 5 1
- b- En déduire que  $p^2 + 5$  est divisible par 6 1

**EXERCICE 3: 6 POINTS**

On définit une suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  par :  $U_0 = 6$  et  $U_{n+1} = 3U_n - 8$

- 1-a- Vérifier que  $U_1 = 10$  et  $U_2 = 22$  0,5
- b- En déduire que la suite  $U_n$  n'est ni arithmétique, ni géométrique . 1
- 2- On définit la suite  $(V_n)_{n \geq 0}$  par  $V_n = U_n - 4$ .
- Montrer que la suite  $V_n$  est géométrique de raison 3. Calculer  $V_0$ . 1,5
- 3- En déduire l'expression de  $V_n$  puis celle de  $U_n$  en fonction de  $n$  1
- 4-a- Calculer en fonction de  $n$  la somme  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ . 1
- b- En déduire en fonction de  $n$  la somme  $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$  1



**EXERCICE 4: 8,5 POINTS / les constructions géométriques seront complétés dans la feuille annexe**

Dans la figure 1 si contre on a :

- $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $O$  et de diamètre  $[AD]$  circonscrit au triangle  $ABC$  .  $I$  milieu de  $[BC]$
- On désigne par  $h$  l'homothétie centre  $A$  et de rapport 2

- 1- Construire le point  $E = h(B)$  et le point  $F = h(C)$
- 2- a- Déterminer l'image de  $O$  par  $h$ . Justifier ta réponse
- b-  $K$  est le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(EF)$   
Montrer que l'image de  $(IO)$  par  $h$  est la droite  $(DK)$
- 3- a- Montrer que  $h(I) = K$
- b- On déduire que  $ABKC$  est un parallélogramme .
- 4- a- Construire le cercle  $\mathcal{C}'$  image de  $\mathcal{C}$  par  $h$ . préciser son centre
- b- Montrer que le cercle  $\mathcal{C}'$  est circonscrit au triangle  $AEF$

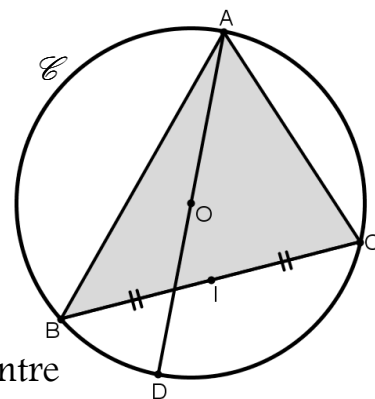


figure 1

- 5- On désigne par  $h_1$  l'homothétie de centre  $C$  tel-que  $h_1(B) = I$
- a- Donner le rapport de  $h_1$  0,5
- b- On suppose que  $A$  et  $C$  sont fixes et  $B$  varie sur le cercle  $\mathcal{C}$ .  
Déterminer et construire l'ensemble  $\mathbf{C}_1$  décrit par le point  $I$ . 1
- 6- a- Déterminer et construire l'ensemble  $\mathbf{C}_2$  décrit par le point  $K$  lorsque  $B$  varie sur  $\mathcal{C}$  1
- b- On désigne par  $t_{\overrightarrow{AC}}$  la translation du vecteur  $\overrightarrow{AC}$ . Montrer que  $t_{\overrightarrow{AC}}(\mathcal{C}) = h(\mathbf{C}_1)$  0,75

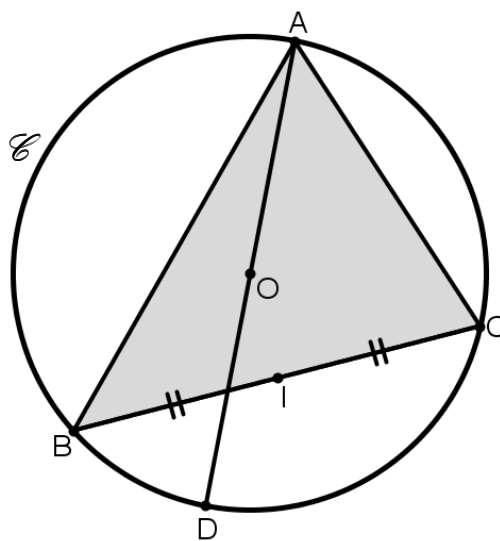
# FEUILLE ANNEXE

Nom \_\_\_\_\_

Prénom \_\_\_\_\_

Classe : 2<sup>ème</sup> sc \_\_\_\_\_**EXERCICE 1:** mettre un croix dans la case correspondante .

PROPOSITION	a	b	c
<b>1</b> -La suite $U_n = 5 \times 3^{2n}$ est une suite géométrique de raison :	q = 5	q = 3	q = 9
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>2</b> -Le reste de la division euclidienne de 376987 par 11 est :	r = 6	r = 5	r = 0
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>3</b> -Soit $n \in \mathbb{N}$ ; si $d = \text{P.G.C.D}(n + 1, 2n + 3)$ , alors d est égale a :	d = 1	d = 2	d = n
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**EXERCICE 4:** Compléter les constructions géométriques

### CORRECTION DE L'EXERCICE 1

PROPOSITION	a	b	c
1-La suite $U_n = 5 \times 3^{2n}$ est une suite géométrique de raison :	$q = 5$	$q = 3$	$q = 9$
			×
2-Le reste de la division euclidienne de 376987 par 11 est :	$r = 6$	$r = 5$	$r = 0$
	×		
3-Soit $n \in \mathbb{N}$ ; si $d = \text{P.G.C.D}(n + 1, 2n + 3)$ , alors d est égale a :	$d = 1$	$d = 2$	$d = n$
	×		

#### Justification des réponses :

1-  $U_{n+1} = 5 \times 3^{2(n+1)} = 5 \times 3^{2n+2} = \underbrace{5 \times 3^{2n}}_{U_n} \times 3^2 = 9U_n$ ; d'ou la suite  $U_n$  est géométrique de raison  $q = 9$

2-  $d = 7 - 8 + 9 - 6 + 7 - 3 = -1 + 3 + 4 = 6$ , d'ou Le reste de la division euclidienne de 376987 par 11 est  $r = 6$

3-Soit  $d = \text{P.G.C.D}(n + 1, 2n + 3)$ . Calculons le P.G.C.D( $n + 1, 2n + 3$ ) par l'algorithme d'Euclide  
 $2n + 3 = 2 \times (n + 1) + 1$ ,  $n + 1 = 1 \times (n + 1) + 0$  et par suite  $d = 1$

2<sup>ème</sup> méthode : Puisque la justification n'est pas demandée on peut remplacer par exemple l'entier n par 0, ainsi  $d = \text{PGCD}(1, 3) = 1$

### CORRECTION DE L'EXERCICE 2

1- Effectuons la division euclidienne du nombre 2017 par 6 :  $2017 = 6 \times 336 + 1$

2- Soit p un nombre premier supérieur a 3

a- il s'agit de montrer que les restes de la division euclidienne de p par 6 ne peuvent pas être un des nombres 0, 2, 3 et 4

•  $p = 6q + r$ , avec  $0 \leq r < 6$

si  $r = 0$  ou  $r = 2$  ou  $r = 4$ , alors p sera divisible par 2 :

2 divise  $6q$  et 2 divise r donc 2 divise  $p = 6q + r$  et cela contredit l'hypothèse que p est un nombre premier supérieur a 3, donc p n'est divisible que par 1 et lui même.

si  $r = 3$  alors p sera divisible par 3 :

3 divise  $6q$  et 3 divise r donc 3 divise  $p = 6q + r$  et cela contredit l'hypothèse que p est un nombre premier

Conclusion : les restes possibles de la division euclidienne de p par 6 sont 1 ou 5

b- D'après question a :  $p = 6q + 1$  ou  $p = 6q + 5$

• Si  $p = 6q + 1$ , alors :

$$p^2 + 5 = (6q + 1)^2 + 5 = 36q^2 + 12q + 1 + 5 = 36q^2 + 12q + 6 = \underbrace{6 \times (6q^2 + 2q + 1)}_{\text{Divisible par 6}}$$

• Si  $p = 6q + 5$ , alors :

$$p^2 + 5 = (6q + 5)^2 + 5 = 36q^2 + 60q + 25 + 5 = 36q^2 + 60q + 30 = \underbrace{6 \times (6q^2 + 10q + 5)}_{\text{Divisible par 6}}$$

Conclusion :  $p^2 + 5$  est divisible par 6 pour tout nombre premier p supérieur a 3.

### CORRECTION DE L'EXERCICE 3

On définit une suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  par :  $U_0 = 6$  et  $U_{n+1} = 3U_n - 8$  ①

1-a- On remplace n par 0 dans l'égalité ① on aura  $U_1 = 3U_0 - 8 = 3 \times 6 - 8 = 10$ , d'où  $U_1 = 10$

On remplace n par 1 dans l'égalité ① on aura  $U_2 = 3U_1 - 8 = 3 \times 10 - 8 = 22$ , d'où  $U_2 = 22$

b-  $U_1 - U_0 = 10 - 6 = 4$ ,  $U_2 - U_1 = 22 - 10 = 12$

$U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$  d'où la suite  $U_n$  n'est pas arithmétique

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{22}{10}$ ,  $\frac{U_1}{U_0} = \frac{10}{6}$ ;  $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$  d'où la suite  $U_n$  n'est pas géométrique

**Conclusion :** la suite  $U_n$  n'est ni arithmétique, ni géométrique

2-On définit la suite  $(V_n)_{n \geq 0}$  par  $V_n = U_n - 4$ .

$V_{n+1} = U_{n+1} - 4$  et d'après ① on aura  $V_{n+1} = 3U_n - 8 - 4 = 3U_n - 12 = 3(U_n - 4) = 3V_n$

ainsi la suite  $V_n$  est géométrique de raison  $q = 3$  et de premier terme  $V_0 = U_0 - 4 = 6 - 4 = 2$

3-  $V_n = V_0 q^n = 2 \times 3^n$ , d'où  $V_n = 2 \times 3^n$

$V_n = U_n - 4$  signifie  $U_n = V_n + 4 = 2 \times 3^n + 4$  d'où  $U_n = 2 \times 3^n + 4$

4-a-  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  est la somme des  $(n+1)$  premiers termes consécutifs de la suite

géométrique  $V_n$ , d'où  $S_n = V_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = 2 \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = 2 \times \frac{3^{n+1} - 1}{2} = 3^{n+1} - 1$

donc  $S_n = 3^{n+1} - 1$

b-  $U_n = V_n + 4$ ;  $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = (V_0 + 4) + (V_1 + 4) + \dots + (V_n + 4)$

signifie  $T_n = \underbrace{(V_0 + V_1 + \dots + V_n)}_{S_n} + \underbrace{(4 + 4 + \dots + 4)}_{(n+1) \text{ fois}} = S_n + (n+1) \times 4$

signifie  $T_n = 3^{n+1} - 1 + 4n + 4 = 3^{n+1} + 4n + 3$  donc  $T_n = 3^{n+1} + 4n + 3$

### CORRECTION DE L'EXERCICE 4

1- Construction des points E et F : •  $E = h(B)$  signifie  $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$  •  $F = h(C)$  signifie  $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$

2-a-O milieu de diamètre [AD] donc  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$ , et par suite  $h(O) = D$

b- • K est le projeté orthogonal de D sur (EF) donc  $(DK) \perp (EF)$  ①

•  $E = h(B)$  et  $F = h(C)$  donc  $h(BC) = (EF)$  et par suite  $(BC) \parallel (EF)$  ②

de ① et ② on déduit que  $(DK) \perp (BC)$  ③

•  $OB = OC$  et  $IB = IC$  donc (OI) est la médiatrice du segment [BC] et par suite  $(OI) \perp (BC)$  ④

de ① et ② on déduit que  $(OI) \parallel (DK)$  ⑤

•  $h(O) = D$ , donc  $h((OI))$  est la droite passant par D et parallèle à (OI), d'après ⑤  $h((OI)) = (DK)$

3- a-Montrons que  $h(I) = K$

$I \in (OI) \cap (BC)$ , donc  $h(I) \in h((OI)) \cap h((BC))$  et par suite  $h(I) \in (DK) \cap (EF) = \{K\}$ , d'où  $h(I) = K$

b- •  $h(I) = K$  donc  $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI}$  et par suite  $I = A * K$  ①, et on a  $I = B * C$  ②

de ① et ② on déduit que les diagonales [AK] et [BC] du quadrilatère ABKC se coupent en leur milieu I, et par suite AKBC est un parallélogramme

4-a-  $\mathcal{C}$  est un cercle de centre O et de rayon OA, donc  $\mathcal{C}' = h(\mathcal{C})$  est un cercle de centre

$h(O) = D$  et de rayon  $2OA = AD$ . Voir figure 1

b- Le cercle  $\mathcal{C}$  passe par les points A, B et C, donc  $\mathcal{C}' = h(\mathcal{C})$  passe par les points  $h(A) = A$ ,  $h(B) = E$  et  $h(C) = F$ , et par suite le cercle  $\mathcal{C}'$  circonscrit au triangle AEF.

5- a-  $h_1$  l'homothétie de centre C tel-que  $h_1(B) = I$

I milieu de [BC] donc  $\vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{CB}$  et par suite I est l'image de B par l'homothétie de centre C et de

rapport  $\frac{1}{2}$ , ainsi le rapport de l'homothétie  $h_1$  est  $\frac{1}{2}$

b- On suppose que A et C sont fixes et B varie sur le cercle  $\mathcal{C}$ .

$h_1(B) = I$  ; si B varie sur  $\mathcal{C}$  alors I varie sur  $h_1(\mathcal{C})$

•  $\mathcal{C}$  est un cercle de diamètre AD, donc  $h_1(\mathcal{C})$  est un cercle de diamètre  $\frac{1}{2}AD = OA = OC$

ainsi I varie sur  $\mathcal{C}_1$ : cercle de diamètre OC (voir figure1)

6- a- l'ensemble  $\mathcal{C}_2$  décrit par le point K

lorsque B varie sur  $\mathcal{C}$ , d'après 5°- b, I varie sur  $\mathcal{C}_1$  et d'après 3°- b  $h(I) = K$ , donc K varie sur  $h(\mathcal{C}_1)$

•  $\mathcal{C}_1$  est un cercle de diamètre OC, donc  $h(\mathcal{C}_1)$  est un cercle de diamètre  $h(O)h(C) = DF$  ainsi K varie sur  $\mathcal{C}_2$ : cercle de diamètre DF (voir figure 1)

b- ABKC est un parallélogramme signifie  $\vec{AC} = \vec{BK}$  et par suite  $t_{AC}(B) = K$

et puisque  $h(I) = K$  alors  $t_{AC}(B) = h(I)$

Si B décrit le cercle  $\mathcal{C}$ , I décrit le cercle  $\mathcal{C}_1$  et par suite

$$t_{AC}(\mathcal{C}) = h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$$

