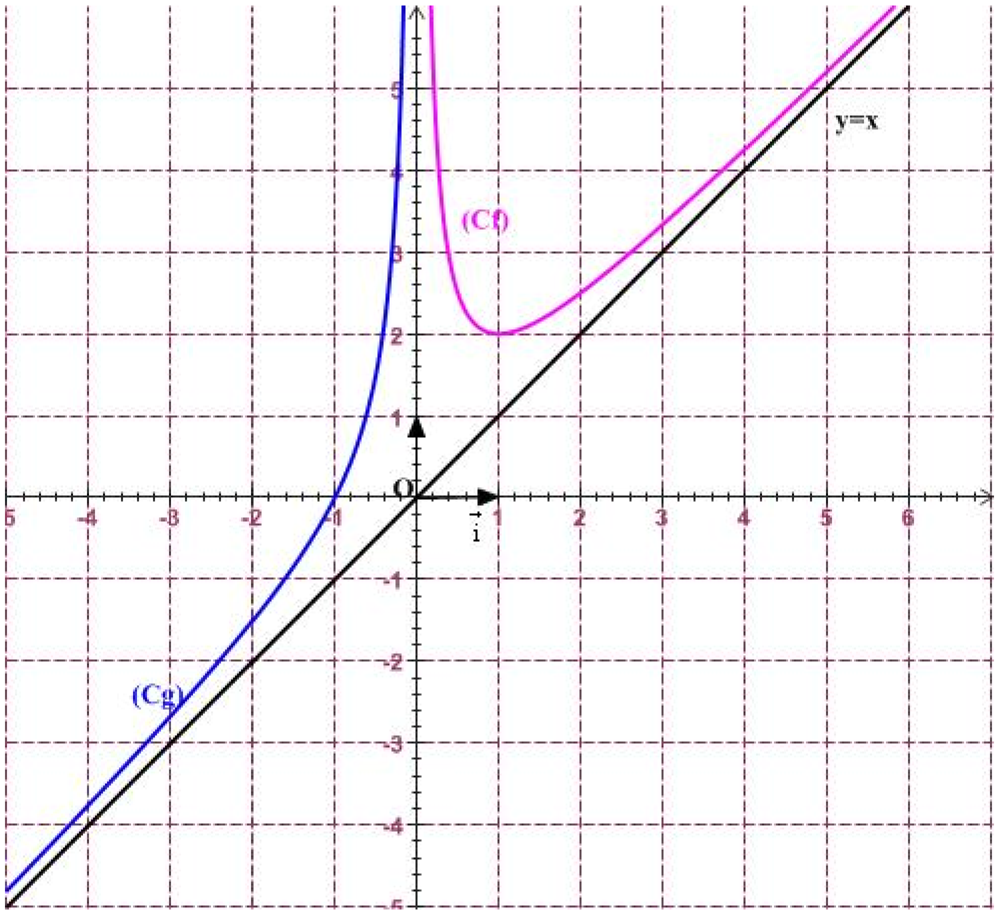
Exercice n°1 : ©

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=x-\frac{1}{x}$.

1. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g.
2. Montrer que f est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $]0,1]$. Qu'en est il de g ?
3. Compléter les représentations graphiques de f et g dans le repère ci-dessous :



4. Déterminer les images de chacun des intervalles suivants par la fonction f : $\left[\frac{1}{2},3\right]$; $[1,+\infty[$ et $]0,1]$.

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{-x^2-x+6}$.

On désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.
3. a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $-x^2-x+6=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$.

   b) Etudier les variations de f sur son domaine de définition.

4. a) Montrer que pour tout $x \in [-3,2]$, $f(-1-x) = f(x)$.

b) En déduire que (C) est symétrique par rapport à la droite $\Delta : x = -\frac{1}{2}$.

5. a) Tracer (C).

b) Déterminer $f([-3,2])$.

Exercice n°3 : ©

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2},3\right]$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, où a, b et c sont trois réels. On donne ci-dessous son tableau de variation :

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\frac{1}{2} & & 0 & & 1 & & 3 \\ \hline & & & -1 & & & & \bullet \\ f(x) & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ & -2 & & & & -2 & & \end{array}$$

1. Déterminer l'expression de $f(x)$.

2. Déterminer $f\left(\left[-\frac{1}{2},3\right]\right)$.

3. a) Montrer que l'équation "$f(x) = 0$" admet une solution unique $\alpha \in \left[-\frac{1}{2},3\right]$. Vérifier que $1.6 < \alpha < 1.7$.

b) Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

4. On considère les fonctions g et h définies sur I par $g(x) = \frac{2-2x}{1+x^2}$ et $h(x) = -2x + 3$.

Etudier les positions relatives des courbes (C_g) et (C_h).

Exercice n°4 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la limite de f en 1.
3. La fonction f est – elle prolongeable par continuité en 1 ? si oui définir ce prolongement.

Exercice n°5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x+a}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. a) Déterminer a pour que f admette un prolongement par continuité en 1.

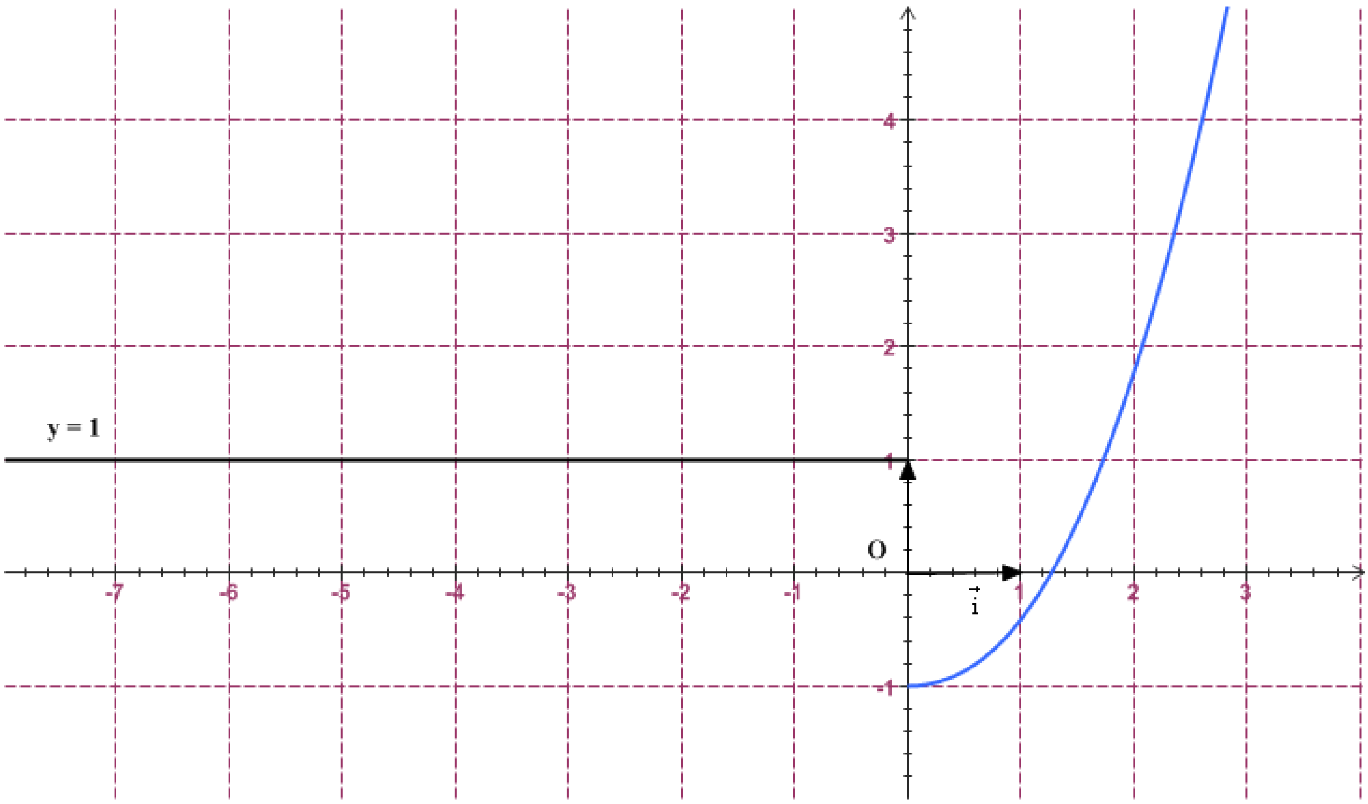
b) Définir dans ce cas ce prolongement.

Exercice n°6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2-\sqrt{x^2+1} & si\ x>0 \\ 1+\dfrac{a}{x-1} & si\ x\leq 0 \end{cases}$.

1. Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2. Compléter la représentation graphique de f dans le repère ci dessous :



3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans l'intervalle $]1,2[$.

Donner une valeur approchée par défaut de α à 0.1 prés.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

5. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice n°1 :

1. Parité de f : $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in IR^*$

   Soit $x \in IR^*$, $-x \in IR^*$ et on a : $f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$

   $\Rightarrow$ f est une fonction impaire.

   Parité de g : $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \in IR^*$

   Soit $x \in IR^*$, $-x \in IR^*$ et on a : $g(-x) = -x - \frac{1}{-x} = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -g(x)$

   $\Rightarrow$ g est une fonction impaire.

2. Soient a et b deux réels non nuls tels que a < b.

   $$f(b) - f(a) = b + \frac{1}{b} - a - \frac{1}{a} = b - a + \frac{a-b}{ab} = \underbrace{(b-a)}_{>0}\left(1 - \frac{1}{ab}\right)$$

   - Si a et b $\in$ [1, + ∞[alors $ab > 1 \Rightarrow \frac{1}{ab} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{ab} > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0$

     $\Rightarrow f(b) > f(a) \Rightarrow f$ est strictement croissante sur [1, + ∞[.

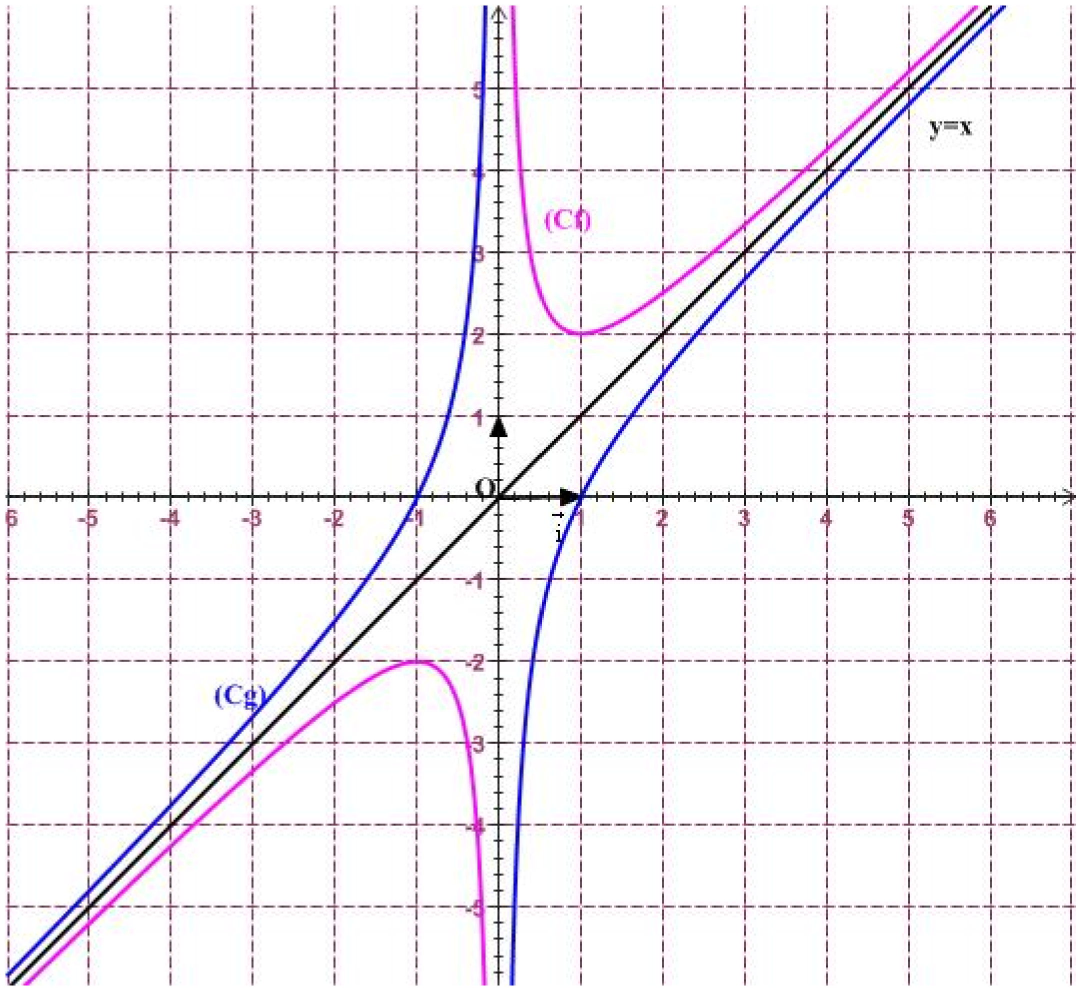
   - Si a et b $\in$]0, 1] alors $ab < 1 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{ab} < 0 \Rightarrow f(b) - f(a) < 0$

     $\Rightarrow \Rightarrow f(b) < f(a) \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur]0, 1].

   Pour la fonction g, le cas est beaucoup plus simple.

   En effet : $g(x) = x - \frac{1}{x}$ c'est la somme de deux fonctions croissantes sur IR* donc g est une fonction croissante sur IR*.

3. f et g sont deux fonctions impaires sur IR* donc leurs courbes sont symétriques par rapport à l'origine du repère.



4. $f\left(\left[\frac{1}{2},3\right]\right)=f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\cup[1,3]\right)=f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\cup f\left([1,3]\right)=\left[2,\frac{5}{2}\right]\cup\left[2,\frac{10}{3}\right]=\left[2,\frac{10}{3}\right]$

$f\left([1,+\infty[\right)=\left[f(1),\lim_{+\infty} f\right[=[2,+\infty[$

$f\left(]0,1]\right)=\left[f(1),\lim_{0^+} f\right[=[2,+\infty[$

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=\left[-\frac{1}{2},3\right]$ par $f(x)=ax^3+bx^2+c$, où a,b et c sont trois réels. On donne ci-dessous son tableau de variation :

x	$-\frac{1}{2}$		0		1		3
$f(x)$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\bullet$

1. $f(0)=-1 \Leftrightarrow c=-1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2 \Leftrightarrow -\frac{a}{8}+\frac{b}{4}+c=-2 \Leftrightarrow -a+2b+8c=-16 \Leftrightarrow a-2b=8$

$f(1) = -2 \Leftrightarrow a+b+c = -2 \Leftrightarrow a+b = -1$

$\begin{cases} a-2b = 8 \\ a+b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

Ainsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

2. $f(3) = 26$

x	$-\frac{1}{2}$		0		1		3
$f(x)$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	26

$f\left(\left[-\frac{1}{2},3\right]\right) = [\min f, \max f] = [-2, 26]$

3. a) L'équation : $f(x) = 0$

- $f\left(\left[-\frac{1}{2},1\right]\right) = [-2,-1]$ et $0 \notin [-2, -1]$

  $\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

- f est continue et strictement croissante sur [1, 3], de plus $f(1) = -2 < 0$ et $f(3) = 26 > 0$
  $\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans [1, 3].
  $f(1.6) = -0.488 < 0$
  $f(1.7) = 0.156 > 0$
  $\Rightarrow 1.6 < \alpha < 1.7$

b)

x	$-\frac{1}{2}$		α		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4. $g(x) = \dfrac{2-2x}{1+x^2}$ et $h(x) = -2x+3$

$g(x) - h(x) = \dfrac{2-2x}{1+x^2} + 2x - 3 = \dfrac{2-2x+2x+2x^3-3-3x^2}{1+x^2} = -\dfrac{f(x)}{1+x^2}$

x	$-\frac{1}{2}$		α		3
$g(x)-h(x)$		$+$	0	$-$	
Position de Cg par rapport à Ch		Cg est au dessus de Ch	$I(\alpha,-2\alpha+3)$	Cg est au dessous de Ch	