

*Les intégrales - Logarithme népérien*  
*Géométrie dans l'espace*

**EXERCICE 1 :**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le plan  $P_m : 2x - y + 2z + m = 0$ ; ( $m$  étant un paramètre réel).

Soit l'ensemble (S) des points  $M(x, y, z)$  de l'espace vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$$

- 1) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le rayon et le centre  $\Omega$ .
- 2) Etudier suivant les valeurs du paramètre réel  $m$  la position relative de (S) et le plan  $P_m$
- 3) a) Caractériser l'intersection de la sphère (S) et le plan  $P_3$ .  
b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans Q et Q' tangents à (S) et parallèles au plan  $P_3$ .

**EXERCICE 2 :**

L'espace étant muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On donne les points  $A(-2, 2, 1)$ ,  $B(-2, 1, 2)$ ,  $C(-1, 1, 1)$  et  $\Omega(-1, 2, 2)$ .

- 1) Soit l'ensemble P des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $\vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$ 
  - a) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à P.
  - b) Montrer que P est un plan dont on donnera une équation cartésienne.
- 2) Calculer  $\vec{A\Omega} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$ . En déduire que  $\Omega \notin P$ .
- 3) Montrer que le point  $\Omega$  appartient à l'axe du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle ABC.
- 4) Soit S la sphère de centre  $\Omega(-1, 2, 2)$  et de rayon  $R = \sqrt{2}$ .
  - a) Ecrire une équation cartésienne de S.
  - b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle  $\mathcal{C}$ .
  - c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle  $\mathcal{C}$ .

**EXERCICE 3 :**

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$

- 1) a) Vérifier que  $I_2 = \frac{8}{15}$   
b) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$I_{n+1} = (2n + 2) \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^n dx$$

- c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$
- 2) On considère les deux fonctions F et G définies sur  $\mathbb{R}$  par :
 
$$F_n(x) = \int_0^{\sin x} (1 - t^2)^n dt \quad \text{et} \quad G_n(x) = \int_0^x (\cos t)^{2n+1} dt$$
  - a) Montrer que  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $F_n'(x)$  et  $G_n'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
  - b) En déduire que pour tout réel  $x$ , on a :  $F_n(x) = G_n(x)$
  - c) En déduire la valeur de l'intégrale  $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^7 dt$

**EXERCICE 4 :**

- 1) Simplifier chacune des expressions suivantes :
  - a)  $A = \ln 60 + \ln 20 - 2 \cdot \ln 10$
  - b)  $B = 2 \ln(a^3 \sqrt{b}) + \ln\left(\frac{a}{b^4}\right) - 4 \ln(b^3)$ ;  $a > 0$  et  $b > 0$

2) Résoudre dans IR :

$$2\ln x - 8 = 0, \quad 1 + 2\ln(x - 1) = 0, \quad 2\ln x + 6 \leq 0 \quad \text{et} \quad 2 - 4\ln(x + 3) \leq 0$$

### **EXERCICE 5 :**

Calculer chacune des limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{\ln x}$  ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) \ln x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \cdot \ln x - x^2) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^3} \quad ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

### **EXERCICE 6 :**

Calculer chacune des intégrales suivantes :  $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$  ;  $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx$  ;  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx$  ;

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}} \, dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx \quad \text{et} \quad \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$$

### **EXERCICE 7 : x**

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \int_1^e (\ln x)^n \cdot dx$

- 1) a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et que  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- 2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$
- 3) a) En tenant compte des questions 1)a) et 2) , montrer que  $\frac{e}{n+2} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$   
 b) Calculer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
- 4) Soit la fonction  $f : x \mapsto (\ln x)^2$  et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
 a) Montrer que  $u_1 = 1$ . En déduire  $u_2$  et  $u_3$ .  
 b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de  $(O, \vec{i})$  de la partie du plan limitée par (C), l'axe  $(O, \vec{i})$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

### **EXERCICE 8 : x**

**A/** Le tableau ci-contre représente les variations d'une fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(a + b \cdot \ln x) \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels}).$$

$x$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f$	0	$\frac{e}{2}$	$-\infty$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On suppose que la courbe représentative (C) de  $f$  passe par le point A(1,1) et que la tangente T à (C) en ce point a pour équation :  $y = x$

- 1) Déterminer  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
- 2) En déduire les valeurs de a et b.

**B/** Dans la suite on prend :  $\begin{cases} f(x) = x^2(1 - \ln x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$  pour tout  $x > 0$

- 1) Calculer  $f'_d(0)$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique au  $V(+\infty)$  qu'on précisera.
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et l'axe des abscisses.
- 4) a) Etablir le tableau de variation de la fonction  $h : x \mapsto x - x \ln x - 1$   
 b) En déduire alors la position de (C) par rapport à T.
- 5) Tracer la tangente T et la courbe (C).