

Les Probabilités sur un ensemble fini
Variables aléatoires discrètes

EXERCICE 1 :

Un sac contient 9 jetons répartis comme suit : $\begin{cases} 4 \text{ jetons blancs marqués : } 1, 1, 2, 6 \\ 5 \text{ jetons rouges marqués : } 2, 2, 2, 3, 4 \end{cases}$

On suppose que tous ces jetons sont indiscernables au toucher.

I/ On tire au hasard Successivement et avec remise trois jetons du sac.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Trois jetons rouges ».

B : « Au moins un jeton blanc ».

C : « Trois jetons dont la somme des numéros marqués est égale à 8 ».

D : « Un jeton et un seul blanc et un jeton et un seul portant un numéro multiple de 3 ».

II/ On tire au hasard Successivement et sans remise quatre jetons du sac.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « Le premier et le dernier jeton tiré porte chacun le numéro 2 ».

F : « Obtenir exactement deux jetons marqués 2 ».

G : « Le premier jeton tiré est rouge et le deuxième jeton tiré est marqué 2 ».

III/ On tire au hasard simultanément trois jetons du sac.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Un seul jeton rouge ».

B : « Au plus deux jetons blancs ».

C : « Le numéro 2 apparaît pour la 1ère fois au 2ème tirage élémentaire ».

EXERCICE 2 :

Une entreprise fabrique des chemises en très grande série. Une chemise peut présenter deux types de défauts :

* Un défaut de finition avec une probabilité de 0,03.

* Un défaut de couleur avec une probabilité de 0,02.

■ La probabilité qu'une chemise ait les deux défauts à la fois est de 0,01.

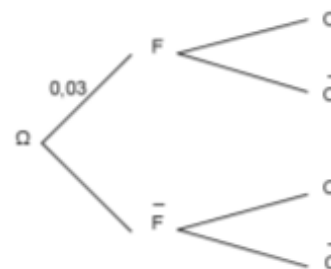
On considère les événements :

F : « La chemise présente un défaut de finition »

C : « La chemise présente un défaut de couleur »

A : « La chemise ne présente aucun défaut »

On peut modéliser ces données par l'arbre de probabilités ci-contre :



I/1) a) Donner la valeur de $p(C \cap F)$.

b) En déduire que $p(C \cap \bar{F}) = 0,01$

2) a) On sait que la chemise présente un défaut de finition. Montrer que la probabilité qu'elle ait un défaut de couleur est égale à $\frac{1}{3}$.

b) En déduire la probabilité que la chemise ait seulement un défaut de finition.

3) Montrer que la probabilité que la chemise ait un unique défaut est de 0,03.

4) Montrer que $p(A) = 0,96$

5) On considère un lot de 10 chemises emballées de cette entreprise. Un contrôle s'effectue sur l'état de chaque article de ce lot de façon indépendante. Soit X le nombre de chemises dans ce lot n'ayant aucun défaut. Calculer la probabilité (arrondi à 10^{-2} près) que 9 chemises de ce lot ne présentent aucun défaut.

II/ Une chemise (de cette entreprise) sans défaut est vendue à 40 DT. Son prix décroît à 30 DT si elle présente un seul défaut. Elle sera vendue à 20 DT si elle présente les deux défauts. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque chemise associe son prix de vente.

1) Déterminer la loi de probabilité de Y .

2) Calculer le prix moyen d'une chemise.

EXERCICE 3 :

Une équipe de football participe chaque année à deux tournois l'un concerne la coupe et l'autre concerne le championnat. La probabilité pour que cette équipe gagne le championnat est de 0,4, celle que cette équipe gagne la coupe quand elle a gagné le championnat est de 0,7 et la probabilité que cette équipe gagne la coupe quand elle n'a pas gagné le championnat est de 0,3.

On considère les évènements suivants :

B : " L'équipe gagne le championnat "

C : " L'équipe gagne la coupe "

1) a) Donner un arbre pondéré qui illustre les données ci-dessus.

b) Calculer la probabilité pour que cette équipe ne gagne ni le championnat ni la coupe.

c) Calculer la probabilité pour que cette équipe gagne la coupe.

2) La fédération de football consacre 200 milles dinars pour l'équipe qui remporte le championnat et 100 milles dinars pour l'équipe qui remporte la coupe. Quel est le revenu moyen de cette équipe ?

3) Cette équipe participe 5 années successives à ces deux tournois, le résultat de chaque année est indépendant des résultats des autres années. Calculer la probabilité pour que cette équipe remporte au moins deux fois le doublé : (coupe et championnat)

EXERCICE 4 :

Une urne U_1 contient 4 jetons rouges, 3 jetons verts et 2 jetons noirs. Les jetons sont indiscernables au toucher .

1) On tire simultanément et au hasard 3 jetons de U_1 . Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Tirer trois jetons de même couleur »

B : « Tirer trois jetons portant les trois couleurs »

C : « Tirer trois jetons portant deux couleurs »

2) On considère une urne U_2 contenant 3 jetons verts numérotés (1,1,1) et un jeton noir numéroté 2. On considère l'épreuve suivante :

• Si A est réalisé alors on tire au hasard successivement et sans remise 3 jetons de U_2 .

• Si B est réalisé alors on tire au hasard successivement et avec remise 3 jetons de U_2 .

• Si C est réalisé alors on tire au hasard simultanément 3 jetons de U_2 .

On désigne par X l'aléa numérique qui à chaque tirage de 3 jetons de U_2 associe le nombre de jetons numérotés 1.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer la probabilité de B sachant qu'on a tiré 3 jetons numérotés 1 de l'urne U_2 .

3) On tire un jeton de U_2 et on le met dans l'urne U_1 , puis on tire simultanément deux jetons de U_1 . Calculer la probabilité de l'événement : E : « tirer deux jetons de même couleur de U_1 »

EXERCICE 5 :

Pour prévenir deux défauts D_1 et D_2 des pièces fabriquées par une usine, on décide de soumettre un échantillon assez grand de pièces à des tests.

⇒ Les études statistiques menées sur cet échantillon ont montré que :

■ 8% des pièces présentent le défaut D_1 ; Parmi lesquelles 15% ont le défaut D_2 .

■ Parmi les pièces n'ayant pas le défaut D_1 , 90% ne présente pas le défaut D_2 .

On choisit au hasard une pièce produite par l'usine et on considère les deux événements :

A : « La pièce présente le défaut D_1 » et B : « La pièce présente le défaut D_2 »

1) Dessiner un arbre de probabilités qui modélise la situation.

2) Quelle est la probabilité que la pièce choisie présente les deux défauts ?

3) Quelle est la probabilité que la pièce choisie présente seulement le défaut D_2 ?

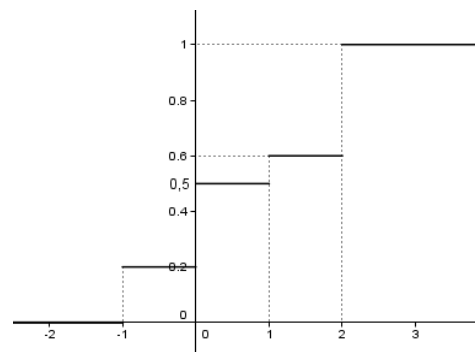
4) En déduire la probabilité que la pièce choisie présente le défaut D_2 ?

5) On sait que la pièce choisie possède le défaut D_2 . Quelle est la probabilité qu'elle possède le défaut D_1 ?

EXERCICE 6 :

Dans le graphique ci-contre on a représenté la fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un univers Ω .

- 1) Déterminer les valeurs prises par X .
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance et l'écart-type de X .
- 3) Donner les valeurs de : $p(X=-1)$, $p(X \leq 1)$, $p(1 \leq X \leq 2,5)$ et $p(X \geq -4)$.



EXERCICE 7 :

Des personnes $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ se transmettent une information dans cet ordre. Chaque personne transmet l'information de manière fidèle avec une probabilité de 0,9 ou la change en son contraire avec une probabilité de 0,1.

On suppose que la première personne possède l'information non déformée.

Pour $n \geq 1$, A_n est l'événement « la $n^{\text{ème}}$ personne possède l'information non déformée » et p_n sa probabilité.

- 1) Calculer p_1 et p_2
- 2) Utiliser un arbre pour calculer p_3
- 3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,8.p_n + 0,1$
- 4) Soit (q_n) la suite définie par $q_n = p_n - \frac{1}{2}$, $n \geq 1$

Montrer que (q_n) est une suite géométrique. Exprimer alors p_n en fonction de n

- 5) Quelle est la probabilité que la 20^{ème} personne possède l'information non déformée.
- 6) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

EXERCICE 8: (Bac blanc 2008 Lycée pilote de Sousse)

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication en série d'un appareil donné.

Un contrôle de qualité a montré que chaque appareil pouvait présenter deux types de défauts :

un défaut de soudure avec une probabilité de 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité de 0,02 ; le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants.

Un appareil est dit défectueux s'il présente au moins l'un de ces deux défauts.

1/ Montrer que la probabilité qu'un appareil fabriqué par cette entreprise soit défectueux est 0,0494.

2/ Une grande surface commerciale reçoit un lot de 10000 appareils fabriqués par cette entreprise. Déterminer la moyenne et l'écart type de la distribution des appareils défectueux dans ce lot.

3/ Un petit commerçant passe une commande de n appareils à cette entreprise.

- a) Pour $n = 25$, calculer à 10^{-3} près la probabilité pour qu'il y ait au plus 2 appareils défectueux dans sa commande.
- b) Ce commerçant souhaite que dans sa commande, la probabilité d'avoir au moins un appareil défectueux soit inférieure à 0,5. Déterminer la valeur maximale du nombre n des appareils de sa commande.